ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

- Подробный теоретический материал
- Тренировочные варианты
- Ответы ко всем задания

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ!
ГАРАНТИЯ КАЧЕСТВА
ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ!

УДК 373.167.1:51(03)
ББК 22.1я721
Р 59

Роганин А. Н.
Р 59 ЕГЭ. Математика : универсальный справочник / А.Н. Роганин, Ю.А. Захарийченко, Л.И. Захарийченко. – М. : Яуза-пресс, 2013. – 368 с. – (ЕГЭ. Универсальный справочник).

ISBN 978-5-99550-657-7

Справочник адресован учащимся старших классов для подготовки к ЕГЭ по математике.
Пособие содержит подробный теоретический материал по всем темам, проверяемым экзаменом. После каждого раздела даются примеры заданий ЕГЭ и тренировочный тест. Для итогового контроля знаний в конце справочника приводятся тренировочные варианты, соответствующие ЕГЭ по математике. Ко всем заданиям приводятся ответы.
Издание будет полезно учителям математики, родителям для эффективной подготовки учащихся к ЕГЭ.

УДК 373.167.1:51(03)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-99550-657-7

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 3
ФУНКЦИИ

Раздел 4
ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

Раздел 5
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Раздел 6
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

ТРЕНИРОВОЧНОЕ ТЕСТОВОЕ ЗАДАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Теоретический курс с примерами заданий ЕГЭ

Выражения и преобразования

Уравнения и неравенства

Функции

Числа и выражения

Геометрические фигуры
и их свойства

Элементы комбинаторики,
статистики, теории вероятности

ЕГЭ

Раздел 1

Выражения и преобразования

1.1. Корень степени *n*

1.1.1. Понятие корня степени *n*

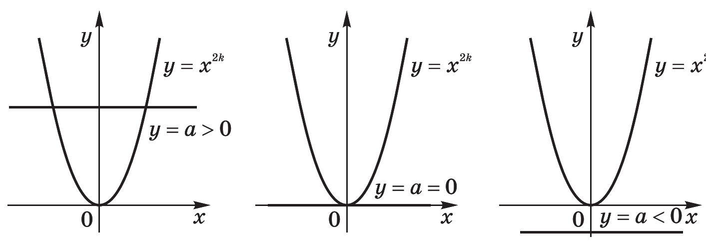
Корнем степени n из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a; a — действительное число.

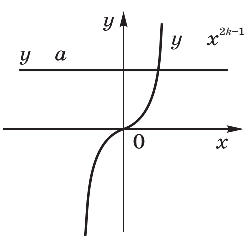
Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или –2, поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

Согласно этому определению, корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a.

Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in \mathrm{N}$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2k - 1$, $k \in \mathrm{N}$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.





Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень степени n из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n, коротко говорят «корень степени n» или «корень n-й степени».

Пример 1. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8}=2$, поскольку $2^3=8$ и $2>0$;

б) $\sqrt[4]{81}=3$, поскольку $3^4=81$ и $3>0$;

в) $\sqrt[5]{1}=1$, поскольку $1^5=1$ и $1>0$;

г) $\sqrt[100]{0}=0$, поскольку $0^{100}=0$ и $0=0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел: $\sqrt[2k]{a}=x,\ a\ge 0,\ k\in N$.

Арифметический корень нечетной степени существует из любого число, поскольку $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a},\ \ k\in N$.

Пример 2. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$;

б) $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\ge 0;\\ -a, \text{ если } a<0, \text{ где } k\in \mathrm{N}.\end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$, где $k\in \mathrm{N}$.

Пример 3. Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a\ge b$; б) $a<b$.

Решение.

$\sqrt[8]{(a-b)^8}=|a-b|$.

а) если $a\ge b$, то $a-b\ge 0$ и $|a-b|=a-b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8}=a-b$;

б) если $a<b$, то $a-b<0$ и $|a-b|=-(a-b)=b-a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8}=b-a$.

1.1.2. Свойства корня степени n

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\textbf{если } a\ge 0,\ b\ge 0, \textbf{ то } \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\ \text{где } a\ge 0,\ b\ge 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}=\sqrt[3]{0,027}\cdot\sqrt[3]{125}=0,3\cdot 5=1,5;$

б) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}=\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{0,0081}=4\cdot 0,3=1,2.$

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500};$ б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}.$

Решение.

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{1000}=10;$ б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324\cdot 4}=\sqrt[4]{18^2\cdot 2^2}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^4}=6.$

Пример 3. Упростите выражение:

$(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$

Решение.

$$(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2=(\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2+2\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}+(\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2=$$

$$=7+2\sqrt{10}+2\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}+7-2\sqrt{10}=14+2\sqrt{49-4\cdot 10}=14+2\cdot 3=20.$$

Пример 4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}.$

Решение.

$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}=\sqrt[3]{4^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{16-8}=\sqrt[3]{8}=2.$$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\textbf{если } a\ge 0 \textbf{ и } b>0, \textbf{ то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n-й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ \text{где } a\ge 0,\ b>0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}};$ б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}};$ в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}.$

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};$ б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}=\frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{5}{2}=2,5;$ в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}=1,5.$

Пример 2. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}};$ б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}.$

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=3;$ б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\frac{80}{5}}=\sqrt[4]{16}=2.$

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\text{если } a > 0, \text{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ где } n \in \mathbf{N},\ n \geq 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}) = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geq 0,\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$.

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$.

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$; б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = |a^5| = |a|^5$.

Корень степени *m* из корня степени *n*

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\text{если } a \geq 0, \text{ то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},\ m \geq 2,\ n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3\cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

П р и м е р 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^{10}}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}}=\dfrac{\sqrt[5]{(3^2)^5}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}}=\dfrac{3^2\cdot 5}{7^2}=\dfrac{45}{49}$;

б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}=\dfrac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\dfrac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\dfrac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\dfrac{3^3}{2^2\cdot 5}=\dfrac{27}{20}=1\dfrac{7}{20}$.

Корень из произведения и частного корней

П р и м е р 1. Упростите:

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}}$.

Решение.

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[12]{(a^2)^4}\,\sqrt[12]{(ab^2)^3}\cdot\sqrt[12]{(a^5b)^2}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=$

$=\sqrt[7]{\sqrt[12]{a^8a^3b^6a^{10}b^2}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[12]{a^{21}b^8}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[24]{(a^{21}b^8)^2}:\sqrt[24]{(a^7b^3)^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[24]{\dfrac{a^{42}b^{16}}{a^{21}b^9}}}=\sqrt[7]{\sqrt[24]{a^{21}b^7}}=$

$=\sqrt[24]{\sqrt[7]{a^{21}b^7}}=\sqrt[24]{a^3b}$.

Другие комбинации свойств корней степени *n*

П р и м е р 1. Упростите:

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{2\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{24}}=\sqrt[6]{24}$;

б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{80}}=\sqrt[6]{80}$;

в) $\sqrt{2\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{4}\cdot\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{4x}}=\sqrt[4]{4x}$;

г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\sqrt[4]{32}}=\sqrt[16]{32}$.

П р и м е р 2. Найдите значение выражения:

$\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}+\dfrac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}+\frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}=\frac{(5+2\sqrt{2})^2}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})}+\frac{(5-2\sqrt{2})^2}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}=\frac{25+20\sqrt{2}+8}{25-8}+\frac{25-20\sqrt{2}+8}{25-8}=\frac{66}{17}=3\frac{15}{17}.$$

П р и м е р 3. Найдите значение выражения:

$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$.

Решение.

$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^2}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{16+8\sqrt{7}+7}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=$

$=\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{23^3-(8\sqrt{7})^2}=\sqrt[4]{529-448}=\sqrt[4]{81}=3$.

1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}}=\sqrt[n]{a^n\cdot a^m}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{a^m}=a\sqrt[n]{a^m},\ a>0,\ n\in\mathrm{N},\ n\geq 2.$$

Пример. Вынести множитель из-под корня.

а) $\sqrt[5]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{2^7}=\sqrt[5]{2^5\cdot 2^2}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{2^2}=2\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500}=\sqrt[4]{625\cdot 4}=\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{4}=5\cdot\sqrt[4]{2^2}=5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}=\sqrt[3]{a^9\cdot a^2\cdot b^3\cdot b}=\sqrt[3]{a^9\cdot b^3}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}=a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Ответ: а) $2\sqrt[5]{4}$; б) $2\sqrt{6}$; в) $5\sqrt{2}$; г) $a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня:

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b},\ \text{если}\ a\geq 0,\ b\geq 0,\ n\in\mathrm{N},\ n\geq 2.$$

Для корней четной степени в зависимости от знака a имеем: $a\cdot\sqrt[2n]{b}=\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\geq 0$, $b\geq 0$; $a\sqrt[2n]{b}=-\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\leq 0$, $b\geq 0$.

В частности, для квадратных корней: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, если $a\geq 0$, $b\geq 0$; $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$, если $a\leq 0$, $b\geq 0$.

Пример. Внести множитель под корень:

а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}$; в) $-5a\sqrt{\dfrac{8}{25}}, a<0$.

Решение.

а) $3\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3^3\cdot 6}=\sqrt[3]{27\cdot 6}=\sqrt[3]{162}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}}\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}b}$; в) $-5a\sqrt{\dfrac{b}{25}}=\sqrt{\dfrac{25a^2b}{25}}=\sqrt{a^2b}$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{162}$; б) $\sqrt[5]{a^{10}b}$; в) $\sqrt{a^2b}$.

Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^k\cdot b^{n-k}}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}}.\ \text{Если}\ a\geq 0,\ b>0,$$

Пример. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot 5}{5^2\cdot 5}}=\dfrac{\sqrt[3]{3\cdot 5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{15}}{5}=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

Ответ: $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1.
«Корень степени *n*»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B2

B3

B4

B5

B6

B7

B8

B9

B10

B1. Вычислите $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

B2. Вычислите $\sqrt[5]{81 \cdot 96}$.

B3. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$.

B4. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

B5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

B6. Вычислите $\sqrt{3}(\sqrt{12} - 2\sqrt{27})$.

B7. Вычислите $\sqrt{48} - 2\sqrt{3}(2 - 5\sqrt{12})$.

B8. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2$.

B9. Вычислите $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$.

B10. Вычислите $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10}+3}}$.

B11. Вычислите $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}+\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}$.

B12. Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{125}{1000}}-\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}$.

B13. Вычислите $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}-\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

B14. Вычислите $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}+\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

B15. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{0,3^{10}\cdot 2^{15}}$.

B16. Найдите значение выражения $\sqrt[10]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}\cdot 4^{30}}$.

B17. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

B18. Найдите значение выражения $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

B11
B12
B13
B14
B15
B16
B17
B18

1.2. Степень с рациональным показателем

1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

***n*-й натуральной степенью действительного числа *a* называется действительное число *b*, получаемое в результате умножения числа *a* самого на себя *n* раз:**

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}.$$

n-ю степень числа a обозначают a^n и пишут

$$b = a^n.$$

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени ($n \geq 2$, $n \in Z$).

$$0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^1 = a.$$

Например:

$5^1 = 5$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Степень с целым показателем

При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$, 0^0 — не определено.

При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (n — натуральное число).

Например:

$8^{-1} = \dfrac{1}{8}$; $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$; $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$;

0^{-5} — не определено.

Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где $a > 0$, $m \in N$, $m > 2$, $n \in Z$.

Например:

$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5$; $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$;

$2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,

$a \geq 0$, n — натуральное число, $n \geq 2$.

Например:

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$; $(-5)^{\frac{1}{3}}$ — не определено.

1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем

Произведение степеней с одинаковыми основаниями

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \ (a^{p+q} = a^p \cdot a^q).$$

П р и м е р 1. Представьте выражение в виде степени:

а) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = b^{\frac{7}{6}}$;

б) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^0 = 1$ при $x \neq 0$.

П р и м е р 2. Вычислите:

а) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; б) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$.

Решение.

а) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5}+\frac{11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$;

б) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 5^1 = 5$.

П р и м е р 3. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3\cdot\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$;

$$\left(\frac{16}{0,0625}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{0,0625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,0625^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{(0,5^4)^{\frac{1}{4}}}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,5^{4\cdot\frac{1}{4}}}{2^{4\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{0,5^1}{2^1} = 0,25.$$

Частное степеней с одинаковыми основаниями

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя:

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \ \left(a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q}\right) \text{ или } \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

П р и м е р 1. Упростите:

а) $a^{\frac{13}{15}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{15}} = a^{\frac{1}{5}}$;

б) $y^{\frac{5}{9}} : y^{-\frac{1}{6}} = y^{\frac{5}{9}-\left(-\frac{1}{6}\right)} = y^{\frac{5}{9}+\frac{1}{6}} = y^{\frac{13}{18}}$;

в) $\frac{z^{-0,3}}{z^{-0,8}} = z^{-0,3-(-0,8)} = z^{-0,3+0,8} = z^{0,5}$.

П р и м е р 2. Вычислите:

$$\frac{\sqrt[7]{128} \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[7]{2^7} \cdot \sqrt[5]{2^5}}{\sqrt{9^2} \cdot \sqrt[3]{4^3}} = \frac{2^{\frac{7}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{5}}}{9^{\frac{2}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{3}}} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 4} = \frac{1}{9}.$$

Степень степени

При возведении степени в степень нужно показатели степеней перемножить, а основание оставить прежним:

$$(a^p)^q = a^{pq} \ (a^{pq} = a^q \cdot a^p).$$

Пример 1. Упростите:

а) $\left(x^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{7}{9}} = x^{\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{9}} = x^{\frac{4}{9}}$;

б) $(a^{-1,8})^{\frac{4}{9}} = a^{-1,8\cdot\frac{4}{9}} = a^{-0,8}$.

Пример 2. Представьте выражение в виде степени с дробным показателем:

$\sqrt[4]{b^3\sqrt{b}} = b^{\frac{3}{4}}\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{3}{4}}\cdot b^{\frac{1}{8}} = b^{\frac{7}{8}}$.

Пример 3. Вычислите:

а) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$;

б) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

Степень произведения и частного

***p*-я степень произведения равна произведению *p*-х степеней множителей:**

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p \ ((a^p \cdot b^p) = (ab)^p).$$

***p*-я степень дроби равна *p*-й степени числителя, деленной на *p*-ю степень знаменателя:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \ \left(\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p\right);$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p.$$

Пример 1. Упростите выражения:

а) $(a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = (a^3)^{\frac{1}{3}}\cdot(b^6)^{\frac{1}{3}} = a^{3\cdot\frac{1}{3}}\cdot b^{6\cdot\frac{1}{3}} = a^1b^2 = ab^2$;

б) $\left(x^{-\frac{1}{4}}y^{-2}\right)^{-4} = \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4}\cdot(y^{-2})^{-4} = x^{-\frac{1}{4}\cdot(-4)}y^{-2\cdot(-4)} = x^1y^8 = xy^8$;

в) $\left(\frac{b^3}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(b^3)^{\frac{1}{3}}}{(x^6)^{\frac{1}{3}}} = \frac{b^{3\cdot\frac{1}{3}}}{x^{6\cdot\frac{1}{3}}} = \frac{b^1}{x^2} = \frac{b}{x^2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\left(\frac{9^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}}{75^{-1}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{(3^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 75}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3^{2\cdot\frac{3}{2}}\cdot 3\cdot 5^2}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3^3\cdot 3\cdot 5^2}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} =$

$= \left(3^4\cdot 5^{2-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{4\cdot\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}} = 3^3\cdot 5 = 135$;

б) $\left(\dfrac{4^{0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{25^{0,3}\cdot 5^{1,4}}{9^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{(2^2)^{0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot (2^6)^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{(5^2)^{0,3}\cdot 5^{1,4}}{(3^2)^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$=\left(\dfrac{2^{1,4}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot 2^{-2}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{5^{0,6}\cdot 5^{1,4}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2}{2^{-3}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{5^2}{3^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}\cdot(5^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(3^2)^{\frac{1}{2}}=2^3\cdot 5\cdot 3=120.$

Сравнение степеней с различными основаниями

Пусть r — рациональное число и $0 < a < b$. Тогда

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0,$$
$$a^r > b^r \text{ при } r < 0.$$

Пример 1. Сравните:

а) $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$; б) $0,3^{\frac{1}{2}}$ и $0,5^{\frac{1}{2}}$; в) $7^{\frac{1}{3}}$ и $7^{\frac{2}{6}}$.

Решение.

а) Так как $0 < 2 < 3$ и $\dfrac{1}{2} > 0$, то $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}}$.

б) Так как $0 < 0,3 < 0,5$ и $\dfrac{1}{2} > 0$, то $0,3^{\frac{1}{2}} < 0,5^{\frac{1}{2}}$. в) $7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{6}} = 7^{\frac{1}{3}}$.

Пример 2. Сравните:

а) $5^{\frac{2}{7}}$ и $3^{\frac{2}{7}}$; б) $(-8)^{-15}$ и $(-7)^{-15}$.

Решение.

а) Поскольку $5 > 3$, то $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$.

б) Так как $7 < 8$, то $7^{-15} > 8^{-15}$, тогда $-7^{-15} < -8^{-15}$ или $(-7)^{-15} < (-8)^{-15}$.

Пример 3. Среди всех четных чисел, которые больше $\sqrt[4]{79}$, укажите наименьшее.

Решение.

Поскольку $2 < \sqrt[4]{79} < 3$, то четными числами, которые больше $\sqrt[4]{79}$, являются 4, 6, 8, ..., а наименьшим числом является 4.

Ответ: 4.

Сравнение различных степеней с одинаковыми основаниями

Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует, что

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1, \qquad a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1.$$

Пример 1. Сравните:

а) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{\sqrt{2}}$; б) 2^{-3} и 2^{-4}; в) $2^{-\sqrt{2}}$ и $2^{-\sqrt{3}}$.

Решение.

а) Поскольку $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, и $2 > 1$, то $2^{\sqrt{3}} > 2^{\sqrt{2}}$.

б) Поскольку $-3 > -4$, и $2 > 1$, то $2^{-3} > 2^{-4}$.

в) Поскольку $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$, и $2 > 1$, то $2^{-\sqrt{2}} > 2^{-\sqrt{3}}$.

П р и м е р 2. Сравните:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}$.

Решение.

а) Поскольку $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ и $0 < \frac{1}{2} < 1$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$.

б) Поскольку $\frac{1}{2} = 0,5$ и $0 < \frac{1}{2} < 1$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}$.

в) Поскольку $-3 > -\pi$ и $0 < \frac{1}{2} < 1$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}$.

Произведение и частное степеней с одинаковыми основаниями

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\dfrac{6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{1,5}}{\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[3]{36}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{4} \cdot 8^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{2^{-1}}}$.

Решение.

а) $\dfrac{6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{1,5}}{\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[3]{36}} = \dfrac{6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{1,5}}{6^{\frac{1}{6}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{6^{\frac{1}{3}+1,5}}{6^{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}} = 6^{\frac{1}{3}+1,5-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} = 6^{1,5-\frac{1}{2}} = 6;$

б) $\dfrac{\sqrt[4]{4} \cdot 8^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{2^{-1}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{4}} \cdot (2^3)^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{9}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = 2^3 = 8.$

П р и м е р 2. Упростите: $\dfrac{\sqrt{xy^{\frac{4}{5}}} \cdot \sqrt[3]{x^{1,5}}}{x\sqrt[5]{y^{-3}}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{xy^{\frac{4}{5}}} \cdot \sqrt[3]{x^{1,5}}}{x\sqrt[5]{y^{-3}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}(x^{1,5})^{\frac{1}{3}}}{x \cdot y^{-\frac{3}{5}}} = \frac{x^{0,5}y^{0,4}x^{0,5}}{x \cdot y^{-0,6}} = x^{0,5+0,5-1}y^{0,4+0,6} = x^0y^1 = y.$$

Другие комбинации свойств степеней

П р и м е р 1. Найдите значение выражения:

$\dfrac{49 - d^{-1}}{7 - d^{-0,5}} + 6d^{0,5}$, если $d = 64$.

Решение.

$$\frac{49 - d^{-1}}{7 - d^{-0,5}} + 6d^{0,5} = \frac{(7 - d^{-0,5})(7 + d^{-0,5})}{7 - d^{-0,5}} + 6d^{0,5} = 7 + d^{-0,5} + 6d^{0,5} =$$

$$= 7 + 64^{-\frac{1}{2}} + 6 \cdot 64^{\frac{1}{2}} = 7 + \frac{1}{\sqrt{64}} + 6 \cdot \sqrt{64} = 7 + \frac{1}{8} + 48 = 55\frac{1}{8}.$$

П р и м е р 2. Вычислите:

$4\cdot\sqrt{4^{1,5}}\cdot 0,25^{-0,25}-3\cdot\sqrt{2^{3,5}}\cdot 0,5^{-1,25}$.

Решение.

$4\cdot\sqrt{4^{1,5}}\cdot 0,25^{-0,25}-3\cdot\sqrt{2^{3,5}}\cdot 0,5^{-1,25}=4\cdot 4^{\frac{3}{4}}\cdot(4^{-1})^{-\frac{1}{4}}-3\cdot 2^{\frac{7}{4}}\cdot(2^{-1})^{-\frac{5}{4}}=4^2-3\cdot 2^3=16-24=-8.$

1.2.3. Тождественные преобразования степенных выражений

На примерах рассмотрим тождественные преобразования выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

П р и м е р 1. Найдите значение выражения:

$$\frac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}}=\frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(2^2\cdot 2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}}=\frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}}{\left(2^{5\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}}=\frac{2^{\frac{11}{12}}}{2^{\frac{11}{12}}}=1.$$

П р и м е р 2.

$$\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=2^1\cdot 5^1=10.$$

П р и м е р 3. Преобразуйте выражение:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}.$$

П р и м е р 4. Упростите выражение:

$$\frac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}=\frac{(a^{0,4})^3-(b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2}=\frac{(a^{0,4}-b^{0,7})((a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2)}{(a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2}=a^{0,4}-b^{0,7}.$$

П р и м е р 5. Сократите дробь:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

П р и м е р 6. Упростите выражение:

$$\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2}+\frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2}-\frac{16}{a-4}\right)^2=\left(\frac{(a^{0,5}+2)^2+(a^{0,5}-2)^2-16}{a-4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(a^{0,5})^2+2\cdot a^{0,5}\cdot 2+2^2+(a^{0,5})^2-2\cdot a^{0,5}\cdot 2+2^2-16}{a-4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a+4a^{0,5}+4+a-4a^{0,5}+4-16}{a-4}\right)^2=\left(\frac{2a-8}{a-4}\right)^2=\left(\frac{2(a-4)}{a-4}\right)^2=2^2=4.$$

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.2. «Степень с рациональным показателем»

Часть 1

Ответом на задания B1–B17 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | B7 | B8 | B9

B1. Вычислите $9^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$.

B2. Вычислите $8^{\frac{2}{3}}$.

B3. Вычислите $81^{\frac{3}{4}}$.

B4. Найдите значение выражения $\dfrac{m^{\frac{2}{3}} - 2{,}25}{m^{\frac{1}{3}} + 1{,}5}$, при $m = 8$.

B5. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{7^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}} \cdot 14}\right)^{-4}$.

B6. Упростите выражение $(b^{-\frac{3}{4}})^{\frac{5}{9}} \cdot b^{\frac{5}{12}}$ и найдите значение выражения, при $b = 1000$.

B7. Вычислите $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$.

B8. Вычислите $\left(\dfrac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

B9. Вычислите $\left(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{2\dfrac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

B10. Найдите значение выражения $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$.

B11. Найдите значение выражения $(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{4}}$.

B12. Вычислите $(27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{\frac{2}{5}} \cdot 81^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{4}}$.

B13. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$, при $a = 2$, $b = 5$.

B14. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$ при $a = 7$.

B15. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{3}}}$ при $x = 1{,}44$.

B16. Найдите значение выражения $\dfrac{2}{y^{\frac{1}{4}} + 3} - \dfrac{2}{y^{\frac{1}{4}} - 3}$ при $y = 100$.

B17. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{b}{a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$, при $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$.

	B10
	B11
	B12
	B13
	B14
	B15
	B16
	B17

1.3. Логарифм

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b:

$$\log_a b = k \Leftrightarrow a^k = b.$$

Например, $\log_2 8 = 3$, т. е. $2^3 = 8$;

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, т. е. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$;

$\lg 100 = 2$, т. е. $10^2 = 100$.

$\log_a 1 = 0$. Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.

$\log_a a = 1$.

1.3.1. Понятие логарифма

Пример 1. Найдите число x:

а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_x 27 = 3$.

Решение.

а) Поскольку $\log_5 x = 2$, то $x = 5^2$; $x = 25$.

б) Поскольку $\log_x 27 = 3$, то $x^3 = 27$, тогда $x = \sqrt[3]{27}$; $x = 3$.

Пример 2. Вычислите:

а) $4 \log_2 16 - 5 \log_3 27$; б) $0,5\log_2 64 + 0,1\log_5 \frac{1}{25}$.

Решение.

а) $4 \log_2 16 - 5 \log_3 27 = 4 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 16 - 15 = 1$.

б) $0,5\log_2 64 + 0,1\log_5 \frac{1}{25} = 0,5 \cdot 6 + 0,1 \cdot (-2) = 3 - 0,2 = 2,8$.

1.3.2. Свойства логарифмов

Логарифм произведения и сумма логарифмов

Логарифм произведения двух положительных чисел по данному основанию равен сумме логарифмов этих чисел по тому же основанию:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,\ x > 0,\ y > 0.$$

Сумма логарифмов положительных чисел по одному основанию равна логарифму произведения этих чисел по тому же основанию:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy,\ x > 0,\ y > 0.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\lg 20 + \lg 5$;

б) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$;

в) $\log_6 4 + \log_6 3 + \log_6 18$.

Решение.

а) $\lg 20 + \lg 5 = \lg (20 \cdot 5) = \lg 100 = 2$;

б) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16 = \log_{12} (9 \cdot 16) = \log_{12} 144 = 2$;

в) $\log_6 4 + \log_6 3 + \log_6 18 = \log_6 (4 \cdot 3 \cdot 18) = \log_6 216 = 3$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

$\log_4 (64c)$, если $\log_4 c = -3,5$.

Решение. $\log_4 (64c) = \log_4 64 + \log_4 c = 3 - 3,5 = -0,5$.

Логарифм частного и разность логарифмов

Логарифм частного двух положительных чисел по данному основанию равен разности логарифмов этих чисел по тому же основанию:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\,,\ x > 0,\ y > 0.$$

Разность логарифмов двух чисел по данному основанию равна логарифму частного по тому же основанию:

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}\,,\ x > 0,\ y > 0.$$

Пример 1. Вычислите:

$\log_3 8 - \log_3 \frac{8}{27}$.

Решение.

$\log_3 8 - \log_3 \frac{8}{27} = \log_3 \left(8 : \frac{8}{27}\right) = \log_3 27 = 3.$

Пример 2. Вычислите:

$\frac{\log_2 25 - \log_2 5}{\log_2 20 - \log_2 4}$.

Решение. $\frac{\log_2 25 - \log_2 5}{\log_2 20 - \log_2 4} = \frac{\log_2 \frac{25}{5}}{\log_2 \frac{20}{4}} = \frac{\log_2 5}{\log_2 5} = 1.$

Логарифм степени и произведение числа и логарифма

Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени и логарифма этого числа:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a x^n = n \log_a x, \\ \log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \log_a x\,. \end{array}\right. \quad x > 0.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\log_3 81$; б) $\lg \sqrt[5]{49}$; в) $\log_4 2$; г) $\log_{\sqrt{2}} 2$; д) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$.

Решение.

а) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cdot \log_3 3 = 4$;

б) $\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$;

в) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = 2 \log_2 2 = 2$;

г) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$.

Пример 2. Упростите:

а) $\log_2 8^x - \log_4 16^x$; б) $\log_6 36^x - x$.

Решение.

а) $\log_2 8^x - \log_4 16^x = x \log_2 8 - x \log_4 16 = 3x - 2x = x$;

б) $\log_3 36^x - x = x \log_6 36 - x = 2x - x = x$.

Пример 3. Вычислите:

а) $-4 \log_6 6^3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125} + \log_{\frac{1}{3}} 9$; в) $13 \log_{9\sqrt[6]{3}} 27\sqrt[6]{3}$.

Решение.

а) $-4\log_6 6^3 = -4 \cdot 3\log_6 6 = -12$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{125} + \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{5^{-1}} 5^{-3} + \log_{3^{-1}} 3^2 = \dfrac{-3}{-1}\log_5 5 + \dfrac{2}{-1}\log_3 3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$;

в) $13\log_{9\sqrt[6]{3}} 27\sqrt[6]{3} = 13 \cdot \log_{3^2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}\left(3^3 \cdot 3^{\frac{1}{6}}\right) = 13\log_{3^{2\frac{1}{6}}} 3^{3\frac{1}{6}} = 13 \cdot \dfrac{3\frac{1}{6}}{2\frac{1}{6}}\log_3 3 = \dfrac{13 \cdot 19 \cdot 6}{6 \cdot 13} = 19.$

Формула перехода от одного основания логарифма к другому

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a};$$
$$a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0;$$
$$b \neq 1;\ x > 0.$$

Следствия:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};\quad \log_a b = \log_{a^k} b^k.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\dfrac{\log_3 4}{\log_3 2}$; б) $\dfrac{\log_{15} 81}{\log_{15} 3}$.

Решение.

а) $\dfrac{\log_3 4}{\log_3 2} = \log_2 4 = 2$; б) $\dfrac{\log_{15} 81}{\log_{15} 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4.$

Пример 2. Вычислите $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$.

Решение. Используем формулу перехода к новому основанию, например, основанию 10:

$$\log_9 5 \cdot \log_{25} 27 = \frac{\lg 5}{\lg 9} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 25} = \frac{\lg 5}{\lg 3^2} \cdot \frac{\lg 3^3}{\lg 5^2} = \frac{\lg 5 \cdot 3\lg 3}{2\lg 3 \cdot 2\lg 5} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

Логарифм произведения и частного степеней, сумма и разность логарифмов с одинаковыми основаниями

Нахождение логарифмов чисел или выражений называется логарифмированием.

1. Логарифм произведения:

$$x = 5abc,\quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0;$$
$$\log_a x = \log_a 5 + \log_a a + \log_a b + \log_a c = \log_a 5 + 1 + \log_a b + \log_a c.$$

2. Логарифм произведения и частного:

$$x = \frac{abc}{5},\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0;$$

$$\log_a x = \log_a a + \log_a b + \log_a c - \log_a 5 = 1 + \log_a b + \log_a c - \log_a 5.$$

3. Логарифм произведения, частного, степени:

$$x = \frac{3m^8k^5}{2n^3},\ m > 0,\ k > 0,\ n > 0,\ a > 0,\ a \neq 1;$$

$$\log_a x = \log_a 3 + 8 \log_a m + 5 \log_a k - \log_a 2 - 3 \log_a n.$$

Нахождение чисел или выражений по данным логарифмам называется **потенцированием.**

Пример 1. $\lg x = \lg 5 - 2 \lg 3 + 3 \lg 2$. Найти x.

Решение. $\lg x = \lg 5 - \lg 3^2 + \lg 2^3$; $\lg x = \lg \dfrac{5 \cdot 2^3}{3^2}$; $x = \dfrac{5 \cdot 2^3}{3^2} = \dfrac{40}{9} = 4\dfrac{4}{9}$.

Пример 2. $\log_a x = \dfrac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$. Найти x.

Решение. $\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p$; $\log_a x = \log_a \dfrac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$; $x = \dfrac{\sqrt{b}c^5}{p}$.

Сумма и разность логарифмов с различными основаниями

Пример 1. Вычислите:

а) $\log_2 5 + \log_4 \dfrac{8}{25}$; б) $\log_3 4 - \log_{\sqrt{3}} \dfrac{2}{3}$.

Решение.

а) $\log_2 5 + \log_4 \dfrac{8}{25} = \log_2 5 + \log_{2^2} \dfrac{8}{25} = \log_2 5 + \dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{8}{25} = \log_2 5 + \log_2 \sqrt{\dfrac{8}{25}} =$

$= \log_2 5 + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{25} = \log_2 5 + \log_2 2^{\frac{3}{2}} - \log_2 5 = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5;$

б) $\log_3 4 - \log_{\sqrt{3}} \dfrac{2}{3} = \log_3 4 - 2\log_3 \dfrac{2}{3} = \log_3 4 - \log_3 \dfrac{4}{9} = \log_3 \left(4 : \dfrac{4}{9}\right) = \log_3 9 = 2.$

Основное логарифмическое тождество

Основное логарифмическое тождество:

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b},$$

где $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$.

Например, $5^{\log_5 3} = 3$; $10^{\lg 7} = 7$; $e^{\ln 5} = 5$.

Пример 1. Вычислите:

$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4}$.

Решение.

$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}} \cdot 5^{\frac{1}{2}\log_5 4} = (5^{\log_5 \sqrt{3}})^4 \cdot (5^{\log_5 4})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{3})^4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot 2 = 18$.

Пример 2. Вычислите:

$25^{0{,}25\log_5 9} - 121^{0{,}5\log_{11} 21}$.

Решение.

$25^{0{,}25\log_5 9} - 121^{0{,}5\log_{11} 21} = 25^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log_5 9} - 121^{\frac{1}{2}\log_{11} 21} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 9^{\frac{1}{2}}} - \left(121^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{11} 21} =$

$= 5^{\log_5 3} - 11^{\log_{11} 21} = 3 - 21 = -18.$

Другие комбинации свойств логарифмов

При вычислении значения одного логарифмического выражения по некоторым другим известным логарифмическим выражениям обычно используют разложение всех входящих в данные выражения множителей на простые множители.

Пример 1. Известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Найти $\log_{30} 8$.

Решение. По формуле перехода к новому основанию представим $\log_{30} 8$ в виде:

$$\log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30}.$$

Разложим числа 8 и 30 на простые множители, получим:

$\lg 8 = \lg 2^3 = 3 \lg 2;$

$\lg 30 = \lg (3 \cdot 10) = \lg 3 + \lg 10 = \lg 3 + 1.$

Представим $\lg 2$ в виде:

$$\lg 2 = \lg \frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - \lg 5.$$

Получим:

$$\log_{30} 8 = \frac{3(1 - \lg 5)}{\lg 5 + \lg 3 + 1 - \lg 5} = \frac{3(1 - a)}{\lg 3 + 1} = \frac{3(1 - a)}{b + 1}.$$

Ответ: $\dfrac{3(1 - a)}{b + 1}$.

1.3.3. Десятичные и натуральные логарифмы

Десятичный логарифм — это логарифм по основанию 10:

$$\log_{10} b = \lg b.$$

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию e (e — иррациональное число, приближенное значение которого: $e \approx 2{,}7$):

$$\log_e b = \ln b.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\dfrac{\lg 27 + \lg 3}{\lg 15 - \lg 5}$;

б) $\lg 30 + \lg 20 - \lg 6$;

в) $0{,}01^{\lg 3 - 1}$.

Решение.

а) $\dfrac{\lg 27 + \lg 3}{\lg 15 - \lg 5} = \dfrac{\lg(27 \cdot 3)}{\lg(15 : 5)} = \dfrac{\lg 81}{\lg 3} = \log_3 81 = 4;$

б) $\lg 30 + \lg 20 - \lg 6 = \lg \dfrac{30 \cdot 20}{6} = \lg 100 = 2;$

в) $0{,}01^{\lg 3 - 1} = (10^{-2})^{\lg 3 - 1} = (10^{-2})^{\lg 3} \cdot (10^{-2})^{-1} = (10^{\lg 3})^{-2} \cdot 10^2 =$

$= 3^{-2} \cdot 100 = \dfrac{100}{9} = 11\dfrac{1}{9}.$

1.3.4. Тождественные преобразования логарифмических выражений

Пример 1. Упростите выражение:
$36^{\frac{1}{2}-\log_6 5}+2^{-\log_2 10}$.
Решение.

$$36^{\frac{1}{2}-\log_6 5}+2^{-\log_2 10}=36^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{36^{\log_6 5}}+\frac{1}{2^{\log_2 10}}=\sqrt{36}\cdot\frac{1}{(6^{\log_6 5})^2}+\frac{1}{10}=$$

$$=6\cdot\frac{1}{25}+0,1=0,24+0,1=0,34.$$

Пример 2. Найдите значение выражения:
$(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}6-\log_{12}3)$.
Решение.
$(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}6-\log_{12}3)=(\log_{12}4+\log_{12}3)(\log_{12}36-\log_{12}3)=$
$=\log_{12}(4\cdot3)\cdot\log_{12}(36:3)=\log_{12}12\cdot\log_{12}12=1\cdot1=1.$

Пример 3. На сколько сумма чисел $\log_2 5$ и $\log_2 20$ больше числа $\log_2(5+20)$?
Решение.
$(\log_2 5+\log_2 20)-\log_2(5+20)=\log_2(5\cdot20)-\log_2 25=\log_2 100-\log_2 25=\log_2(100:25)=$
$=\log_2 4=2.$

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.3. «Логарифмы»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B2

B3

B4

B5

B6

B7

B8

B9

B10

B1. Найдите значение выражения $\log_7 343$.

B2. Вычислите $\log_4 8$.

B3. Вычислите $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$.

B4. Найдите значение выражения $3^{2-\log_3 18}$.

B5. Найдите значение выражения $2^{3\log_2 3}$.

B6. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$

B7. Найдите значение выражения $\log_2 11 - \log_2 44$.

B8. Найдите значение x, если $\lg x = \frac{1}{2}\lg 9 - \frac{2}{3}\lg 8$.

B9. При каком значении x верно равенство $\lg x = \lg 8 + \lg 20 - \lg 40$?

B10. При каком значении x верно равенство $\lg x = \lg 12 + \lg 15 - \lg 18$?

B11. Вычислите $\frac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 + \log_5 0,5}$.

B11

B12. Найдите значение x, если $\lg x = \frac{1}{2}\lg 9 - \frac{1}{3}\lg 8$.

B12

B13. Вычислите $4^{\log_2 5 + \log_{0,25} 10}$.

B13

B14. Вычислите $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$.

B14

B15. Вычислите $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$.

B15

B16. Вычислите $\log_5 7 \cdot \log_{49} 125$.

B16

B17. Вычислите $\lg \operatorname{tg} 1° \cdot \lg \operatorname{tg} 2° \cdot \lg \operatorname{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 88° \cdot \lg \operatorname{tg} 89°$.

B17

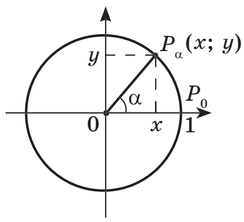
B18. Вычислите $-\log_2 \log_4 \sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}$.

B18

1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс

1.4.1. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента

Рассмотрим единичную окружность, т. е. окружность с центром в начале координат и радиусом 1.



Синусом числа α называется ордината точки P_α, образованной поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α радиан.

Обозначается: $\sin\alpha$, т. е.

$$\sin\alpha = y \text{ — ордината точки } P_\alpha.$$

Косинусом числа α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α радиан.

Обозначается: $\cos\alpha$, т. е.

$$\cos\alpha = x \text{ — абсцисса точки } P_\alpha.$$

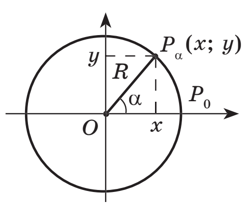
Синус и косинус определены для любого числа α.

$|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$.

Тангенсом числа α называется отношение синуса числа α к его косинусу:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Тангенс определен для всех α, кроме тех значений, при которых $\cos\alpha = 0$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.



Котангенсом числа α называется отношение косинуса числа α к его синусу:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Котангенс определен для всех α, кроме тех, при которых $\sin\alpha = 0$, т. е. $\alpha = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

Для окружности произвольного радиуса R определения тригонометрических функций выглядят следующим образом:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Если $n \in \mathrm{Z}$, то справедливы равенства:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha;\ \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha.$$

Если $n \in \mathrm{Z}$, то справедливы равенства:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

П р и м е р 1. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot 1+1+2\cos\frac{\pi}{6}=$

$=-1\cdot 1+1+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3};$

б) $\sin 405^\circ+\operatorname{ctg}570^\circ=\sin(360^\circ+45^\circ)+\operatorname{ctg}(540^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}.$

П р и м е р 2. Определите знак выражения:

а) $\cos 155^\circ\cdot\sin 255^\circ>0$, т. к. 155° — угол II четверти, то $\cos 155^\circ<0$; 255° — угол III четверти, то $\sin 255^\circ<0$;

б) $\operatorname{tg}127^\circ\cdot\operatorname{ctg}201^\circ<0$, т. к. 127° — угол II четверти, то $\operatorname{tg}127^\circ<0$; 201° — угол III четверти, то $\operatorname{ctg}201^\circ>0$.

1.4.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Основное тригонометрическое тождество

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Следствия:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad\text{при}\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathrm{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\text{при}\ \alpha\neq\pi n,\ n\in\mathrm{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1\ \text{при}\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathrm{Z};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad\text{при}\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathrm{Z}.$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\quad\text{при}\ \alpha\neq\pi n,\ n\in\mathrm{Z}.$$

П р и м е р 1. Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

а) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{2}$?

Решение. Так как рассматриваются функции синус и косинус одного и того же аргумента, то должно выполняется основное тригонометрическое тождество:

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, но $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\neq 1.$

Поэтому равенства $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ одновременно справедливы быть не могут (т. к. не выполняется основное тригонометрическое тождество).

б) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ и $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Решение. Проверим выполнение основного тригонометрического тождества:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1.$

Основное тригонометрическое тождество выполняется. Значит, равенства, данные в условии, одновременно справедливы.

Пример 2. Найдите значения тригонометрических функций числа α, зная, что $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Так как по условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то α — $\in$ II четверти. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -\sqrt{1-0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{1}{3}$.

Пример 3. Упростите:

а) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$; б) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$; в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

Решение.

а) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

б) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot 1 + \cos^2\alpha =$
$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$;

Пример 4. Докажите тождество:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Доказательство.

Преобразуем левую часть тождества. Если в результате получим правую часть, то тождество доказано.

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\frac{\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)} = \frac{2\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha} = 2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Тождество доказано.

Пример 5. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.

Найдите: $\sin\alpha\cos\alpha$.

Решение.

Возведем обе части равенства в квадрат: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = a^2$; $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = a^2$;
$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2$;

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2-1}{2}.$$

Ответ: $\frac{a^2-1}{2}$.

Произведение тангенса и котангенса одного и того же аргумента

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Пример 1. Могут ли быть справедливы равенства:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2$?

Решение.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, то:

а) равенства справедливы, так как $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = 1$;

б) равенства справедливыми не могут быть, так как $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1 \neq 1$.

Пример 2. Упростите: $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{tg} 5° \cdot \ldots . \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \operatorname{tg} 89°$.

Решение.

Так как $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, то

$\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{tg} 5° \cdot \ldots . \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \operatorname{tg} 89° = \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 43° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 47° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 87° \times$
$\times \operatorname{tg} 89° = \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 43° \cdot 1 \cdot \operatorname{ctg} 43° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 3° \cdot \operatorname{ctg} 1° = (\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{ctg} 1°)(\operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{ctg} 3°) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg} 43° \times$
$\times \operatorname{ctg} 43°) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$.

Пример 3. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$. Найдите: $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Решение.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$, то $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 2^2$ или $\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 4$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$, из последнего равенства $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 4 - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 4 - 2\cdot 1 = 2$.

Пример 4. Упростите:

$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

Решение.

$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = (\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) - (\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) =$
$= \operatorname{tg}^2\alpha + 2\cdot 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 2\cdot 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha = 2 + 2 = 4$.

Зависимость между тангенсом и косинусом одного и того же аргумента

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 1. Вычислите значения тригонометрических функций числа α, если

$\operatorname{tg}\alpha = 4,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то α — $\in$ I четверти, поэтому $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; $0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$.

Из формулы $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ следует: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 4^2$; $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 17$;

$\cos^2\alpha = \frac{1}{17}$; $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}$.

Учитывая, что $0 < \cos\alpha < 1$,

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$;

Учитывая, что $0 < \sin\alpha < 1$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0{,}25$.

Пример 2. Упростите:

$$(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha) + \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Решение.

$$(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha) + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Зависимость между котангенсом и синусом одного и того же аргумента

$$1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ при } \alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Вычислите значения тригонометрических функций, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = -3$, α — угол IV четверти.

Решение.

Так как α — угол IV четверти, то $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$; $-1 < \sin\alpha < 0$; $0 < \cos\alpha < 1$.

Известно, что $1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. Отсюда $1+9 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 10;\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{10};\quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}}.$$

Но $-1 < \sin\alpha < 0$, поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{3}$.

Пример 2. Упростите выражения:

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \mathrm{ctg}^2\,5\alpha$;

Решение.

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \mathrm{ctg}^2\,5\alpha = 1 + \mathrm{ctg}^2\,5\alpha = \frac{1}{\sin^2 5\alpha}.$$

Другие комбинации соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Пример 1. Упростите:

а) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 1$; в) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Решение.

а) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 1 = (\cos^2\alpha)^2 - (\sin^2\alpha)^2 + 1 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 1 =$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha + (1 - \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} : \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{1} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha.$

Пример 2. Упростите выражение:

$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и найдите его значение, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}.$$ Если $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{2}{\sin\alpha} = 2 : \dfrac{1}{2} = 4$.

1.4.3. Формулы сложения

Синус суммы и разности

Синус суммы двух аргументов равен сумме произведений синуса первого аргумента на косинус второго и косинуса первого аргумента на синус второго:

$$\mathbf{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Синус разности двух аргументов равен разности произведений синуса первого аргумента на косинус второго и косинуса первого аргумента на синус второго:

$$\mathbf{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\sin 15°$; б) $\sin 75°$.

Решение.

а) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cdot\cos 30° - \cos 45°\cdot\sin 30° = \dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac{\sqrt3}{2} - \dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$;

б) $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45°\cdot\cos 30° + \cos 45°\cdot\sin 30° = \dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac{\sqrt3}{2} + \dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$.

Пример 2. Найдите значения выражений:

а) $\sin 56°\cos 34° + \cos 56°\sin 34°$; б) $\sin\dfrac{7\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12} - \sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12}$.

Решение.

а) $\sin 56°\cos 34° + \cos 56°\sin 34° = \sin(56° + 34°) = \sin 90° = 1$;

б) $\sin\dfrac{7\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12} - \sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{7\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\dfrac{6\pi}{12} = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1.$

П р и м е р 3. Упростите:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Решение.

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

Косинус суммы и разности

Косинус суммы двух аргументов равен разности произведений косинусов этих аргументов и синусов этих аргументов:

$$\mathbf{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Косинус разности двух аргументов равен сумме произведений косинусов этих аргументов и синусов этих аргументов:

$$\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}.$$

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\cos 105°$; б) $\cos 15°$.

Решение.

а) $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$;

б) $\cos 15° = \cos(60° - 45°) = \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

П р и м е р 2. Упростите выражение:

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

Решение.

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$.

П р и м е р 3. Вычислите:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}-\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0{,}3\pi\sin 0{,}2\pi+\sin 0{,}3\pi\cos 0{,}2\pi}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{4\pi}{15}\right)}{\sin(0{,}3\pi+0{,}2\pi)}=\frac{\cos\frac{5\pi}{15}}{\sin 0{,}5\pi}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Тангенс суммы и разности

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}\quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha+\beta)\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}\quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha-\beta)\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}\quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha+\beta)\neq\pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}\quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha-\beta)\neq\pi n,\ n\in Z.$$

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}+\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{20}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{20}}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}$.

Решение.

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}+\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{20}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{20}}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{3\pi}{20}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{20}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1.$

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{16}-\dfrac{3\pi}{16}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{16}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1.$

П р и м е р 2. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha\ \operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha$.

Доказательство.

$$\operatorname{tg}6\alpha=\frac{\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}2\alpha}\Rightarrow\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha(1-\operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha).$$

Тогда из данного равенства имеем:

$\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}6\alpha\ \operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha(1-\operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha)$.

П р и м е р 3. Вычислите tg 15°.

Решение.

$$\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

1.4.4. Следствия из формул сложения

Синус двойного аргумента

Синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

П р и м е р 1. Вычислите: $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$; $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

Решение. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. Найдем $\cos\alpha$.

Так как $180^\circ<\alpha<270^\circ$, то α — угол III четверти, т. е.

$-1<\cos\alpha<0$.

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-0{,}6)^2}=-\sqrt{1-0{,}36}=-\sqrt{0{,}64}=-0{,}8.$

Итак, $\sin 2\alpha=2\cdot(-0{,}6)\cdot(-0{,}8)=0{,}96$.

Ответ: 0,96.

П р и м е р 2. Вычислите:

а) sin 15° cos 15°; б) $(\cos 75°-\sin 75°)^2$.

Решение.

а) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \dfrac{1}{2}(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \dfrac{1}{2}\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$;

б) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ - 2\cos 75^\circ \sin 75^\circ + \sin^2 75^\circ = (\cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ) -$
$- 2\cos 75^\circ \sin 75^\circ = 1 - \sin 150^\circ = 1 - \sin(180^\circ - 30^\circ) = 1 - \sin 30^\circ = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Косинус двойного аргумента

Косинус двойного аргумента равен разности квадратов косинуса и синуса данного аргумента:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Пример 1. Докажите тождество:
$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1$.
Доказательство.
Преобразуем левую часть равенства:
$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2 -$
$-(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta +$
$+\cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta =$
$= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = 1$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Вычислите:

а) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}$; б) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

Решение.

а) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 = (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) =$
$= \cos 30^\circ \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Упростите:

а) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; б) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$.

Решение.

а) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

б) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} =$

$= \dfrac{2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Тангенс двойного аргумента

Тангенс двойного аргумента равен частному удвоенного тангенса аргумента и разности единицы и квадрата тангенса данного аргумента:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}$; б) $\dfrac{6\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

Решение.

а) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\pi}{8}} = \mathrm{tg}\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right) = \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = 1;$

б) $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\,75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,75^\circ} = 3\cdot\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,75^\circ} = 3\cdot\mathrm{tg}\,150^\circ = 3\mathrm{tg}(180^\circ-30^\circ) = 3\cdot(-\mathrm{tg}30^\circ) = -3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$

П р и м е р 2. Вычислите tg 2α, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{4}} = 1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

П р и м е р 3. Упростите:

$$\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Решение.

$$\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha-(1-\mathrm{tg}\,\alpha)}{(1-\mathrm{tg}\,\alpha)(1+\mathrm{tg}\,\alpha)} = \frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha-1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha.$$

1.4.5. Формулы приведения

Тригонометрические функции аргументов $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ могут быть выражены через функции аргумента α с помощью формул, которые называют **формулами приведения.**

Два угла называются **дополнительными**, если их сумма равна 90° $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, для них справедливы равенства:

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \quad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

Чтобы облегчить запоминание формул приведения для преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right) \quad \cos\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$$
$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right) \quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ n\in \mathrm{Z},$$

удобно пользоваться такими правилами:

а) перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

б) функция меняется на «кофункцию», если n — нечетное; функция не меняется, если n — четное (кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс и тангенс).

Примеры к этому правилу приведены в таблице.

Функция	**Аргументы**			
	$\varphi=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\varphi=\pi\pm\alpha$	$\varphi=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\varphi=2\pi-\alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

П р и м е р 1. Найдите значения:

а) $\sin\frac{8\pi}{3}$; б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$.

Решение.

а) $\sin\frac{8\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

П р и м е р 2. Упростите:

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}.$$

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}=1.$$

1.4.6. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

П р и м е р 1. Вычислите значение $\sin\frac{\pi}{12}$ без помощи таблиц.

Решение. По формуле $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ имеем: $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Так как $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$, то $0<\sin\frac{\pi}{12}<1$. Получим: $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Упростим ответ:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

П р и м е р 2. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos\alpha = 0{,}8$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ по условию, то α принадлежит I четверти, и значит, $0 < \sin\frac{\alpha}{2} < 1$, $0 < \cos\frac{\alpha}{2} < 1$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}1};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}} = \sqrt{\frac{1{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}9}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \frac{1}{3}.$$

Сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad \alpha,\ \beta \neq \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\ \beta \neq \pi n,\ n \in Z.$$

П р и м е р 1. Преобразуйте в произведение.

а) $\cos 40^\circ + \cos 10^\circ = 2\cos\frac{40^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-10^\circ}{2} = 2\cos 25^\circ\cos 15^\circ$;

б) $\cos 3\alpha - \cos 7\alpha = 2\sin\frac{3\alpha+7\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha-3\alpha}{2} = 2\sin 5\alpha\sin 2\alpha$.

П р и м е р 2. Найдите значение выражения при данном значении переменной:

$$\frac{1}{\sin\alpha+\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{12}.$$

Решение. Упростим данное выражение:

$$\frac{1}{\sin\alpha+\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha} = \frac{1}{2\sin 2\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{2\sin 4\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha\sin 4\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\sin 4\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha}.$$

Так как $\alpha = \frac{\pi}{12}$, имеем: $\dfrac{\sin 3\cdot\frac{\pi}{12}}{\sin 2\cdot\frac{\pi}{12}\sin 4\cdot\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.4.
«Синус, косинус, тангенс, котангенс»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1 |

B1. Найдите значение выражения $\cos 34^\circ \cos 26^\circ - \sin 34^\circ \sin 26^\circ$.

B2 |

B2. Упростите выражение $\left(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ и найдите его значение, если $\alpha = 18^\circ$.

B3 |

B3. Найдите значение выражения $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$.

B4 |

B4. Упростите выражение $\dfrac{\cos 2\beta - \cos 6\beta}{\sin 6\beta + \sin 2\beta}$ и найдите его значение, если $\beta = 22^\circ 30'$.

B5 |

B5. Упростите выражение $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha}$ и найдите его значение, если $\sin\alpha = 0{,}3$.

B6 |

B6. Упростите выражение $\cos\alpha + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$ и найдите его значение, если $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$.

B7 |

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}$ и найдите его значение, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = 10$.

B8. Найдите значение выражения $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β — углы первой четверти.

B8

B9. Найдите значение выражения $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, α и β — углы второй четверти.

B9

B10. Найдите значение выражения $\sin 25° + \sin 35° - \cos 5°$.

B10

B11. Найдите значение выражения $\cos 103° \cos 13° + \sin 103° \sin 13°$.

B11

B12. Найдите значение выражения $\cos 32° \cos 58° - \sin 32° \sin 58°$.

B12

B13. Вычислите $\sin 20° + \sin 40° - \cos 10°$.

B13

B14. Найдите значение выражения $\sin 70° - \sin 50° - \sin 10°$.

B14

B15. Найдите значение выражения $\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70°$.

B15

B16. Найдите значение выражения $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

B16

B17. Найдите значение выражения $\sin 54° - \sin 18°$.

B17

B18. Найдите значение выражения $\cos 24° - \cos 84° + \cos 48° - \cos 12°$.

B18

1.5. Прогрессии

1.5.1. Арифметическая прогрессия

Формулы общего члена и суммы *n* первых членов арифметической прогрессии

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому прибавляют одно и то же число.

Разница между последующими и предыдущими членами данной последовательности часто обозначается d и называется разностью арифметической прогрессии.

Первый член и разность арифметической прогрессии могут быть какими угодно числами.

Арифметическая прогрессия возрастающая, если ее разность положительная; или убывающая, если ее разность отрицательная.

Другими словами, последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие:

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ где } a \in \mathrm{N}.$$

Отсюда

$$d = a_{n+1} - a_n, \ n \in \mathrm{N}.$$

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и разность d.

Пример 1. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии.

а) 28; 26; 24; ... .

Решение. $a_1 = 28$, $a_2 = 26$, $d = a_2 - a_1 = 26 - 28 = -2$.

Ответ: $a_1 = 28$, $d = -2$.

б) $\sqrt{2} - 3$; $3 - \sqrt{2}$; ... .

Решение. $a_1 = \sqrt{2} - 3$; $a_2 = 3 - \sqrt{2}$;

$d = a_2 - a_1 = 3 - \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 3) = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 3 = 6 - 2\sqrt{2}$.

Ответ: $a_1 = \sqrt{2} - 3$; $d = 6 - 2\sqrt{2}$.

Пример 2. Запишите первые 5 членов арифметической прогрессии, если: $a_1 = 4$, $d = -3$.

Решение. $a_{n+1} = a_n + d$; $a_2 = a_1 + d = 4 - 3 = 1$;

$a_3 = a_2 + d = 1 - 3 = -2$; $a_4 = a_3 + d = -2 - 3 = -5$; $a_5 = a_4 + d = -5 - 3 = -8$.

Ответ: $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -5$; $a_5 = -8$.

Пример 3. Найдите разность арифметической прогрессии.

а) $a_{10} = -10$; $a_{11} = -12$.

Решение. $d = a_{11} - a_{10} = -12 - (-10) = -12 + 10 = -2$.

Ответ: $d = -2$.

б) $a_n = 51$; $a_{n-1} = 58$.

Решение. $d = a_n - a_{n-1} = 51 - 58 = -7$.

Ответ: $d = -7$.

Характеристические свойства арифметической прогрессии

Любой член бесконечной арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов; и наоборот, если выполняется заданное свойство, то последовательность является арифметической прогрессией:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}.$$

Пример. Найдите четвертый член и разность арифметической прогрессии.

а) $a_3 = 120$, $a_5 = 140$.

Решение. По характеристическому свойству арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ т. е. } a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = \frac{120 + 140}{2} = \frac{260}{2} = 130;$$

$d = a_4 - a_3 = 130 - 120 = 10$.

Ответ: $a_4 = 130$; $d = 10$.

б) $a_3 = 0{,}3$; $a_5 = -2{,}3$.

Решение. $a_4 = \dfrac{a_3 + a_5}{2} = \dfrac{0{,}3 - 2{,}3}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1$;

$d = a_4 - a_3 = -1 - 0{,}3 = -1{,}3$.

Ответ: $a_4 = -1$; $d = -1{,}3$.

Свойства арифметической прогрессии

Суммы двух членов конечной арифметической прогрессии, равноудаленных от ее крайних членов, одинаковы и равны сумме крайних членов этой прогрессии.

Пусть дана конечная арифметическая прогрессия: 5; 5,2; 5,4; 5,6; 5,8; 6; 6,2.

Найдем сумму крайних членов прогрессии и суммы членов, равноудаленных от крайних:

$$y_1 + y_7 = 5 + 6{,}2 = 11{,}2; \; y_2 + y_6 = 5{,}2 + 6 = 11{,}2;$$

$$y_3 + y_5 = 5{,}4 + 5{,}8 = 11{,}2; \; y_4 + y_4 = 5{,}6 + 5{,}6 = 11{,}2.$$

Пример. Между числами 7 и 15 вставить число так, чтобы эти три члена образовывали арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть x — искомое число, тогда последовательность 7; x; 15 — арифметическая прогрессия. По характеристическому свойству: $x = \dfrac{7 + 15}{2} = 11$.

Ответ: 11.

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d, \; n \in \mathbf{N}.}$$

Пример 1. Найдите сто первый член арифметической прогрессии, если $a_1 = 2$, $d = 4$.

Решение. По формуле $a_n = a_1 + (n - 1)d$ найдем $a_{101} = a_1 + 100d = 2 + 100 \cdot 4 = 402$.

Ответ: $a_{101} = 402$.

Пример 2. Найдите девятый член арифметической прогрессии: 5; 4,2; 3,4; ... .

Решение. $a_1 = 5$, $d = a_2 - a_1 = 4{,}2 - 5 = -0{,}8$; $a_n = a_1 + (n - 1)d$,

тогда $a_9 = a_1 + (9 - 1)d = a_1 + 8d = 5 + 8 \cdot (-0{,}8) = 5 - 6{,}4 = -1{,}4$.

Ответ: $a_9 = -1{,}4$.

Пример 3. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), в которой $d = -2$, $a_8 = 93$.

Решение. $a_n = a_1 + (n - 1)d$, тогда $a_8 = a_1 + 7d$;

имеем $a_1 + 7 \cdot (-2) = 93$; $a_1 = 93 + 14 = 107$.

Ответ: $a_1 = 107$.

Пример 4. Найдите разность арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 10$, $a_{26} = 110$.

Решение. $a_n = a_1 + (n - 1)d$;

имеем $10 + 25d = 110$; $25d = 110 - 10$; $25d = 100$, $d = 4$.

Ответ: $d = 4$.

П р и м е р 5. Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9; ... число 156?

Решение. В данной прогрессии:

$a_1 = 2,\ a_2 = 9,\ d = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7.$

Тогда формула n-го члена примет вид: $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 7$.

Число 156 является членом данной арифметической прогрессии, если существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $2 + (n - 1) \cdot 7$ равняется 156. Поэтому решим уравнение:

$2 + (n - 1) \cdot 7 = 156;\ (n - 1) \cdot 7 = 154,\ n - 1 = 22,\ n = 23.$

$n = 23$ — натуральное число. Итак, число 156 является 23-м членом данной арифметической прогрессии.

Ответ: $a_{23} = 156$.

П р и м е р 6. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если сумма второго и пятого ее членов равняется 20, а разность девятого и третьего членов равна 18.

Решение. По условию имеем:

$a_2 + a_5 = 20,\ a_9 - a_3 = 18.$

По формуле n-го члена арифметической прогрессии:

$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d;\ a_5 = a_4 + 4d;\ a_9 = a_1 + 8d.$

$a_2 + a_5 = 20;\ a_1 + d + a_1 + 4d = 20;\ 2a_1 + 5d = 20;$

$a_9 - a_3 = 18;\ a_1 + 8d - a_1 - 2d = 18;\ 6d = 18.$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 20; \\ 6d = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 5 \cdot 3 = 20; \\ d = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 = 5; \\ d = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 2,5; \\ d = 3. \end{cases}$$

Ответ: $d = 3;\ a_1 = 2,5$.

П р и м е р 7. Сколько положительных членов имеет арифметическая прогрессия 28; 27,7; ...?

Решение. По условию: $a_1 = 28;\ a_2 = 27,7;\ d = a_2 - a_1 = 27,7 - 28 = -0,3.$

Запишем формулу n-го члена данной арифметической прогрессии:

$a_n = a_1 + (n - 1)d;\ a_n = 28 + (n - 1) \cdot (-0,3);$

$a_n = 28 - 0,3n + 0,3 = -0,3n + 28,3.$

По условию: $a_n > 0,\ -0,3n + 28,3 > 0,$

$-0,3n > -28,3,\ n < \dfrac{283}{3},\ n < 94\dfrac{1}{3}.$

Значит, в данной арифметической прогрессии $n = 94$, т. к. арифметическая прогрессия содержит 94 положительных члена.

Ответ: 94.

Формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии

Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;\ S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n.$$

П р и м е р 1. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии: –23; –20; ... .

Решение. По условию: $a_1 = -23;\ a_2 = -20;$

$d = a_2 - a_1 = -20 - (-23) = 3.$

Тогда, $a_{30} = a_1 + 29d = -23 + 3 \cdot 29 = -23 + 87 = 64.$

Получим:

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{-23 + 64}{2} \cdot 30 = 41 \cdot 15 = 615.$$

Ответ: $S_{30} = 615$.

П р и м е р 2. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма равнялась 210?

Решение. По условию: $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + n - 1 = n$.

$S_n = 210$; $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $\dfrac{1+n}{2} \cdot n = 210$, отсюда:

$n^2 + n - 420 = 0$; $n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+1680}}{2} = \dfrac{-1 \pm 41}{2}$; $n_1 = -21$; $n_2 = 20$.

Число $n \in \mathrm{N}$ не может быть отрицательным (т. к. это номера членов прогрессии). Поэтому $n = 20$.

Ответ: $n = 20$.

П р и м е р 3. Найдите сумму натуральных чисел не больше 105, которые при делении на 9 дают остаток 1.

Решение. Натуральные числа, которые при делении на 9 дают остаток 1, образуют арифметическую прогрессию (a_n): 1; 10; 19; ..., в которой $a_1 = 1$; $d = 9$, $a_n = 1 + 9(n-1) = 9n - 8$. Найдем, сколько членов этой прогрессии не превышают 105.

Для этого решим неравенства: $a_n \le 105$, $9n - 8 \le 105$, $9n \le 113$, $n \le 12\dfrac{5}{9}$. Поэтому нужно искать сумму первых 12 членов прогрессии.

Найдем $a_{12} = 1 + 9 \cdot 11 = 100$. Тогда, $S_{12} = \dfrac{1+100}{2} \cdot 12 = 606$.

Ответ: $S_{12} = 606$.

П р и м е р 4. Найдите сумму первых 9 членов арифметической прогрессии: –1; –2; –3; ... .

Решение. По условию: $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $d = a_2 - a_1 = -2 - (-1) = -2 + 1 = -1$;

$S_9 = \dfrac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = \dfrac{2 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1)}{2} \cdot 9 = -5 \cdot 9 = -45$.

Ответ: $S_9 = -45$.

Текстовые задачи с практическим содержанием на использование арифметической прогрессии

П р и м е р 1. В цирке в одном из секторов для зрителей кресла установлены так, что каждый последующий ряд содержит на одно место больше, чем нижний. Сколько мест в секторе, если в первом ряду 8 кресел, а рядов всего 22?

Решение.

Число мест в каждом ряду сектора образует арифметическую прогрессию 8; 9; ..., в которой 22 члена. Всего мест в секторе:

$S = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \dfrac{2 \cdot 8 + (22-1) \cdot 1}{2} \cdot 22 = \dfrac{37 \cdot 22}{2} = 37 \cdot 11 = 407$.

Ответ: 407.

П р и м е р 2. Отдыхающий, следуя совету врача, загорал в первый день 5 мин, а в каждый последующий день увеличивал время пребывания на солнце на 5 мин. В какой день недели время его пребывания на солнце будет равно 40 мин, если он начал загорать в среду?

Решение.

Время пребывания отдыхающего на солнце образует арифметическую прогрессию: 5; 10; ...

Найдем, через сколько дней время пребывания отдыхающего на солнце будет равно 40 мин:

$40 = 5 + (n - 1) \cdot 5$;

$40 = 5 + 5n - 5$;

$5n = 40$;

$n = 8$.

Следовательно, на восьмой день, т. е. в среду, отдыхающий будет пребывать на солнце 40 мин.

Ответ: в среду.

1.5.2. Геометрическая прогрессия

Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Это постоянное для данной последовательности число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Например: 2, 6, 18, 54, 162, ... ($q = 3$); 8, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$, ... $\left(q = -\frac{1}{4}\right)$ — геометрические прогрессии.

Итак, если геометрическая прогрессия: b_1; b_2; b_3; ..., то $b_2 = b_1 \cdot q$ и т. д., т. е. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Геометрические прогрессии бывают конечные, бесконечные, возрастающие и убывающие.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и знаменатель.

Пример 1. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

а) 2, 8, 32, 128, ...

Решение. $b_1 = 2$, $b_2 = 8$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{8}{2} = 4$.

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 4$.

б) 5, $-5\sqrt{2}$, 10, ...

Решение. $b_1 = 5$; $b_2 = -5\sqrt{2}$; $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-5\sqrt{2}}{5} = -\sqrt{2}$.

Ответ: $b_1 = 5$; $q = -\sqrt{2}$.

Пример 2. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии:

а) $b_1 = 4$, $q = -2$.

Решение. $b_{n+1} = b_n \cdot q$;

$b_2 = b_1 \cdot q = 4 \cdot (-2) = -8$; $b_4 = b_3 \cdot q = 16 \cdot (-2) = -32$;

$b_3 = b_2 \cdot q = -8 \cdot (-2) = 16$; $b_5 = b_4 \cdot q = -32 \cdot (-2) = 64$.

Ответ: 4; -8; 16; -32; 64.

б) $b_1 = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{3}$.

Решение. $b_2 = b_1 \cdot q = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$;

$b_3 = b_2 \cdot q = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;

$b_4 = b_3 \cdot q = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$;

$b_5 = b_4 \cdot q = 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{6}$; $9\sqrt{2}$.

Пример 3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии:

$b_{10} = -\frac{1}{8}$; $b_{11} = \frac{1}{16}$.

Решение. $q = \frac{b_{11}}{b_{10}} = \frac{1}{16} : \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16} \cdot \frac{8}{1} = -\frac{1}{2} = -0,5$.

Ответ: $q = -0,5$.

Свойства геометрической прогрессии

Свойство 1 *(характеристическое свойство)*

Квадрат любого члена бесконечной геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов; и наоборот, если выполняется указанное свойство, то последовательность является геометрической:

$$\boldsymbol{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Итак, каждый член бесконечной геометрической прогрессии, начиная со второго, есть среднее геометрическое двух соседних с ним членов. С этим свойством геометрической прогрессии и связано ее название.

Свойство 2.

Произведения членов конечной геометрической прогрессии, равноудаленных от ее крайних членов, одинаковы и равны произведению крайних членов.

Пример. Найдите второй член геометрической прогрессии: -4; b_2; -25; ... .
Решение.
По характеристическому свойству геометрическая прогрессия:
$b_2^2 = b_1 \cdot b_3 = -4 \cdot (-25) = 100$. Отсюда $b_2 = 10$ или $b_2 = -10$.
Ответ: -10; 10.

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Пример 1. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1 = 64$, $q = \dfrac{1}{2}$.

Решение. По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ найдем $b_7 = b_1 \cdot q^6 = 64 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = 64 \cdot \dfrac{1}{64} = 1$.

Ответ: $b_7 = 1$.

Пример 2. Найдите формулу n-го члена геометрической прогрессии: 3, 9, 27, ...

Решение. По условию: $b_1 = 3$, $b_2 = 9$, $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{9}{3} = 3$.

По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ имеем: $b_n = 3 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.
Ответ: $b_n = 3^n$.

Пример 3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 2$, $b_5 = 162$.

Решение. По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ имеем: $162 = 2 \cdot q^4$, отсюда $q^4 = \dfrac{162}{2} = 81$, $q = 3$ или $q = -3$.

Ответ: -3; 3.

Пример 4. Является ли число 512 членом геометрической прогрессии: 8; 16; 32; ...?
Решение. Пусть n — номер члена, равного 512, если это возможно.

По условию: $b_1 = 8$, $b_2 = 16$; $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{16}{8} = 2$, тогда по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ имеем:

$512 = 8 \cdot 2^{n-1}$; $2^{n-1} = 64$; $2^{n-1} = 2^6$; $n - 1 = 6$; $n = 7$. Так как $n = 7$ — натуральное число, то число 512 является 7-м членом геометрической прогрессии: 8; 16; 32; ... .
Ответ: $b_7 = 512$.

Пример 5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_7 = -12$, $b_9 = -108$.
Решение. По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ получим: $b_9 = b_1 \cdot q^8 = -108$, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = -12$.

Отсюда $\dfrac{b_9}{b_7} = \dfrac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^6} = \dfrac{-108}{-12} = 9$; $q^2 = 9$; $q = \pm 3$.
Ответ: -3; 3.

Формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Если $q = 1$, то каждый член геометрической прогрессии равен b_1, поэтому $S_n = n \cdot b_1$.

Пример 1. Найдите сумму восьми первых членов геометрической прогрессии (b_n): 3; –6; 12; ... .

Решение. По условию: $b_1 = 3$; $b_2 = -6$; $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{-6}{3} = -2$.

Тогда по формуле $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ найдем $S_8 = \dfrac{3 \cdot (1-(-2)^8)}{1+2} = \dfrac{3 \cdot (1-256)}{3} = -255$.

Ответ: $S_8 = -255$.

Пример 2. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если четвертый ее член втрое больше третьего, а сумма первых пяти членов равна $-12{,}1$.

Решение. По условию: $b_4 = 3b_3$, тогда $q = 3$; $S_5 = -12{,}1$,

поэтому $-12{,}1 = \dfrac{b_1(1-3^5)}{1-3}$; $-12{,}1 = 121b_1$; $b_1 = -0{,}1$.

Ответ: $b_1 = -0{,}1$.

Пример 3. Найдите число членов геометрической прогрессии, если $S_n = 189$; $b_1 = 3$, $q = 2$.

Решение. По формуле $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ имеем: $189 = \dfrac{3 \cdot (1-2^n)}{1-2}$;

$1 - 2^n = -63$; $2^n = 64$, отсюда $n = 6$.

Ответ: $n = 6$.

Пример 4. Докажите тождество: $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$.

Доказательство.

Рассмотрим сумму: $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$, где $x \neq 1$.

Слагаемые в этой сумме являются последовательными членами геометрической прогрессии: $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$; $b_1 = 1$, $q = x$. Так как x^{n-1} является членом этой прогрессии с номером n, то задача сводится к нахождению суммы n первых ее членов: $S_n = \dfrac{1 \cdot (x^n - 1)}{x-1} = \dfrac{x^n - 1}{x-1}$.

Таким образом, если $x \neq 1$, то $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x-1}$.

Помножим левую и правую части последнего равенства на $(x - 1)$.

Получим: $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по модулю меньше единицы ($|q| < 1$), называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Например:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots\ \left(q = \frac{1}{2}\right);\ -2;\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{9};\ \frac{2}{27};\ -\frac{2}{81};\ \frac{2}{243};\ \ldots\ \left(q = -\frac{1}{3}\right).$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому приближается сумма n первых членов этой прогрессии, если n бесконечно увеличивается.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}, \textbf{ если } |q| < 1.$$

П р и м е р 1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: 9; 3; 1; ... .

Решение. Так как $b_1 = 9$, $q = \frac{1}{3}$, то по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ имеем:

$$S = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Ответ: $S = 13,5$.

С помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно представить бесконечную десятичную дробь в виде отношения $\frac{m}{n}$.

П р и м е р 2. Запишите число 0,(7) в виде обыкновенной дроби.

Решение. $0,(7) = 0,777... = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ...$.

Слагаемые 0,7; 0,07; 0,007; ... — члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 0,7 и знаменателем $q = 0,1$ $(|q| < 1)$.

Сумма этой прогрессии: $S = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}$. Поэтому $0,(7) = \frac{7}{9}$.

Ответ: $\frac{7}{9}$.

П р и м е р 3. Запишите число 3,1(23) в виде обыкновенной дроби.

Решение. $3,1(23) = 3,12323... = 3 + 0,1 + 0,023 + 0,00023 + ...$.

Слагаемые 0,023; 0,00023; ... — члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 0,023 и знаменателем $q = 0,01$ $(|q| < 1)$.

Сумма этой прогрессии: $S = \frac{0,023}{1-0,01} = \frac{0,023}{0,99} = \frac{23}{990}$.

Поэтому $3,1(23) = 3 + \frac{1}{10} + \frac{23}{990} = 3\frac{122}{990} = 3\frac{61}{495}$.

Ответ: $3\frac{61}{495}$.

Текстовые задачи с практическим содержанием на использование геометрической прогрессии

П р и м е р 1. Банк начисляет 10 % годовых. Какой будет сумма вклада через 5 лет, если вкладчик вложил 10 000 руб.?

Решение. Если вложено в банк a руб., то сумма вклада составляет геометрическую прогрессию:

$$a;\ a\left(1+\frac{p}{100}\right);\ a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2;\ ...$$

Следовательно, через t лет сумма вклада составит $S = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$.

Так как $a = 10\ 000$, $p = 10$, $t = 5$, то

$$S = 10\ 000 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^5 = 10\ 000 \cdot (1,1)^5 = 10\ 000 \cdot 1,61051 = 16105,1.$$

Ответ: 16105,1 руб.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.5. «Прогрессии»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B2

B3

B4

B5

B6

B7

B8

B9

B1. Найдите сотый член арифметической прогрессии, если ее первый член равен 1,2, разность 4.

B2. Найдите первый член арифметической прогрессии (x_n), если $x_{16} = -7$ и $x_{26} = 55$.

B3. Найдите разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 4$, $a_{16} = 67$.

B4. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии −23, −20, … .

B5. Сколько надо взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма равнялась 120?

B6. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, если ее первый член равен 2, а знаменатель −3.

B7. Найдите седьмой член геометрической прогрессии 8, 16, 32, … .

B8. Найдите сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии 12, −4, $\frac{4}{3}$, … .

B9. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{40\cdot 41}$.

B10. Найдите сумму $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, если $n = 99$.

B10

B11. Сколько положительных членов имеет арифметическая прогрессия 30, 26, 22, ... ?

B11

B12. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 102, 95, 88, ...

B12

B13. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 6 дают остаток 1.

B13

B14. Четвертый и десятый члены арифметической прогрессии соответственно равны 35 и 17. Найдите сумму первых восьми членов прогрессии.

B14

B15. Четвертый и десятый члены арифметической прогрессии соответственно равны 35 и 17. Найдите сумму всех положительных членов прогрессии.

B15

B16. Найдите сумму $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 9 \cdot 2^9$.

B16

B17. Найдите сумму $1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\ldots+\sin^n\frac{\pi}{6}+\ldots$.

B17

B18. Найдите сумму $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{5^2}+\ldots+\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3}{5^n}\right)+\ldots$.

B18

Тренировочные тестовые задания к разделу 1 «Выражения и преобразования»

Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1	
B2	
B3	
B4	
B5	
B6	
B7	
B8	
B9	
B10	
B11	
B12	

B1. Упростите выражение $\dfrac{16^3 \cdot 3^{21}}{2^8 \cdot 5^6} : \dfrac{18^{10}}{2^7 \cdot 5^8}$.

B2. Известно, что $x^2 + x = -1$. Найдите $x^3 - 1$.

B3. Дано $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2$. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

B4. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

B5. Упростите выражение $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3})$.

B6. Вычислите $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 9$.

B7. Вычислите $\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 2° + \lg \operatorname{tg} 3° + \ldots + \lg \operatorname{tg} 88° + \lg \operatorname{tg} 89°$.

B8. Вычислите $\dfrac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

B9. Упростите выражение $\dfrac{5a + 42}{a + 8} - \left(\dfrac{a - 8}{a + 4}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{a + 10}{64 - 16a + a^2} - \dfrac{a + 6}{64 - a^2}\right)$.

B10. Найдите значение выражения $1 - \cos 15° \cos 75°$.

B11. Вычислите значение выражения $\dfrac{18 \sin\alpha - 4\cos\alpha}{13\sin\alpha - 16\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

B12. Вычислите $\arccos\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Часть 2

При выполнении заданий С1–С6 требуется привести полное обоснованное решение и ответ.

С1. Найдите значение выражения $\sqrt{19-a}+\sqrt{10-a}$, если $\sqrt{19-a}-\sqrt{10-a}=1$.

С2. Упростите выражение $\frac{3}{1-x^3}+\frac{3}{1+x^3}+\frac{6}{1+x^6}+\frac{12}{1+x^{12}}+\frac{24}{1+x^{24}}+\frac{48}{1+x^{48}}$.

С3. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

С4. Найдите, при каких значениях a и b многочлен $x^4+6x^3+3x^2+ax+b$ делится без остатка на многочлен x^2+4x+3.

С5. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}+3\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

С6. Найдите $\log_{25} 24$, если $\log_6 15=a$, $\log_{12} 8=b$.

Раздел 2
Уравнения и неравенства

2.1. Уравнения с одной переменной

Уравнением называется равенство с переменной. В общем виде уравнение записывают: $f(x) = g(x)$. Под этой записью понимают математическую запись задачи нахождения значений аргумента, при котором значение двух данных функций равны.

Например: $2x = -5$ — линейное уравнение;

$x^2 + 6x - 7 = 0$ — квадратное уравнение;

$\sqrt{x-3} = x$ — иррациональное уравнение;

$\sin x = \frac{1}{2}$ — тригонометрическое уравнение.

Корнем (или решением) уравнения называется значение переменной, которое превращает это уравнение в верное равенство.

Решить уравнение — означает найти все его корни или доказать, что их нет.

Например, $x = 2$ — корень уравнения $\sqrt{x+2} = x$, поскольку при $x = 2$ получим верное равенство:

$\sqrt{4} = 2$, т. е. $2 = 2$.

Областью допустимых значений (ОДЗ) или областью определения уравнения называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, стоящих в левой и правой частях уравнения.

Для уравнения $\sqrt{x-3} = x$ ОДЗ: $x - 3 \geq 0$, т. е. $x \geq 3$, поскольку область определения функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ определяется из условия $x - 3 \geq 0$, а область определения функции $f(x) = x$ — множество всех действительных чисел.

Уравнение-следствие

Если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого.

Если из правильности первого равенства вытекает правильность каждого последующего, то получим уравнения-следствия.

При использовании уравнений-следствий *не происходит потери корней начального уравнения, но возможно появление посторонних корней*. Поэтому при использовании уравнений-следствий **проверка полученных корней** подстановкой в начальное уравнение является составной частью решения.

Например, $\sqrt{x+2} = x$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$(\sqrt{x+2})^2 = x^2;$

$x + 2 = x^2;$

$x^2 - x - 2 = 0;$

$x_1 = 2;\ x_2 = -1.$

Проверка: $x = 2$ — корень, т. к. $\sqrt{2+2} = 2$, т. е. $2 = 2$; $x = -1$ — посторонний корень, т. к. $\sqrt{-1+2} \neq -1;\ 1 \neq -1.$

2.2. Равносильность уравнений

Два уравнения называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же корни. То есть каждый корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, каждый корень второго является корнем первого.

Уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными.

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение

1. Если в уравнении поменять местами левую и правую части, то получится уравнение, равносильное данному. Например: $x + 4 = 2x + 9 \Leftrightarrow 2x + 9 = x + 4$.
2. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному. Например: $2x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow 2x - x = -7 - 3$.
3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному. Например, уравнение $\frac{x+1}{4} = x$ равносильно уравнению $x + 1 = 4x$ (уравнение $x + 1 = 4x$ получено из уравнения $\frac{x+1}{4} = x$ умножением обеих частей на число 4).
4. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть из них одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному. Например: $x + 2 = 5x \Leftrightarrow x + 2 + 7 = 5x + 7$; $5x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5x + 2 - 2 = 0 - 2$.
5. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть из них любую функцию, то получится уравнение, равносильное данному при условии, что области определения полученного и данного уравнений совпадают. Например: $x = 2 \Leftrightarrow x + x^2 = 2 + x^2$; $x^3 + 5x = 8 + 5x \Leftrightarrow x^3 = 8$.

Схема поиска плана решения уравнений

Решение уравнений

С помощью уравнений-следствий	**С помощью равносильных преобразований**
$1 \to 2$ Преобразования, гарантирующие сохранение правильного равенства	Учет ОДЗ начального уравнения
Проверка корней подстановкой в начальное уравнение	$1 \leftrightarrows 2$ Сохранение на ОДЗ правильности равенства при прямых и обратных преобразованиях

В схеме:
1 — начальное уравнение;
2 — уравнение, полученное в результате преобразования начального;
$\downarrow\uparrow$ — символическое изображение направления выполненных преобразований.

Пример. Решите уравнение: $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-1}$.

Решение. Используем **равносильные преобразования** для решения этого уравнения. Для этого необходимо учесть ОДЗ, поэтому зафиксируем ее ограничения в начале решения. Заметим, что в уравнении *ограничения ОДЗ можно только зафиксировать, но не решить*, а в конце — *проверить*, выполняются ли эти ограничения для найденных корней.

ОДЗ: $x-2\neq 0$; $x-1\neq 0$.

На этом ОДЗ уравнение равносильно уравнениям:

$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{5(x-1)-3(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=0.$$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель дроби не равен нулю.

Второе условие уже учтено в ОДЗ, поэтому $2x+1=0$; $x=-\frac{1}{2}$. Учтем ОДЗ: при $x=-\frac{1}{2}$:

$$x-2=-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{2}\neq 0;$$

$$x-1=-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}\neq 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Причины появления посторонних корней и потери корней при решении уравнений

Причина: получение уравнений-следствий за счет следующих преобразований	**При каких преобразованиях могут повляться**	**Пример неправильного (или неполного) решения**
1. Переход к уравнению, у которого ОДЗ шире, чем у заданного уравнения. Необходимо выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение или учитывать ОДЗ заданного уравнения	а) приведение подобных членов	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$ Перенесем из правой части в левую слагаемое $\sqrt{x-2}$ и приведем подобные: $x^2-6x=0$; $x_1=0$; $x_2=6$ (получим посторонний корень $x=0$, который не входит в ОДЗ: $x-2\geq 0$). *Правильный ответ:* 6
	б) приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю (при отбрасывании знаменателя)	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$ Умножим обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей $(x+2)(x+3)$. Получим $4(x+3)+7(x+2)=4$; $x=-2$ (не учли ОДЗ: $x\neq-2$, $x\neq-3$). *Правильный ответ:* корней нет

Окончание таблицы

Причина: получение уравнений-следствий за счет следующих преобразований	**При каких преобразованиях могут появляться**	**Пример неправильного (или неполного) решения**
	в) возведение обеих частей иррационального уравнения в квадрат или любую четную степень	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$ $2x+1=x$; $x=-1$ (не учтено ОДЗ $x \geq 0$; $2x+1 \geq 0$). *Правильный ответ:* корней нет
2. Выполнение преобразований, в которых есть неявное умножение на нуль	Умножение обеих частей на выражение с переменной	$\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}$ Умножим обе части на $(x-1)$: $\frac{x^2}{x-1}\cdot(x-1)=\frac{1}{x-1}(x-1)$; $x^2=1$; $x=\pm1$. ($x=1$ не является корнем). *Правильный ответ:* $x=-1$
3. Применение к обеим частям уравнения функции, которая не монотонна	Возведение обеих частей уравнения в четную степень или добавление к обеим частям тригонометрических функций	$\sqrt{x+1}=x-1$ Возведем обе части в квадрат: $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(x-1)^2$; $x+1=x^2-2x=1$; $x^2-3x=0$; $x(x-3)=0$; $x_1=3$; $x_2=0$ (проверка показывает, что $x=0$ — посторонний корень). *Правильный ответ:* 3
4. Явное или неявное сужение ОДЗ заданного уравнения, в частности, выполнение преобразований, в которых происходит неявное деление на нуль	а) деление обеих частей уравнения на выражение с переменной ↓ *Вывод:* те значения, на которые сузили ОДЗ, необходимо рассмотреть отдельно ↑ б) сложение, вычитание, умножение или деление обеих частей уравнения на выражение, у которого ОДЗ у́же, чем у заданного уравнения	$x^2=x$ Поделим обе части уравнения на x, получим: $x=1$ (потеря корня $x=0$, т. к. фактически получили $\frac{x^2}{x}=\frac{x}{x}$, уравнение, где ОДЗ: $x \neq 0$, т. е. сузили ОДЗ исходного уравнения). *Ответ:* 0; 1
5. Применение формул, сужающих область определения уравнений, в частности, возможно неточное применение формул	Если применяются формулы, сужающие область определения, полученные значения рассматриваем отдельно и следим за строгостью применения формул	$\lg x^2=4$ По свойству логарифма: $2\lg x=4$; $\lg x=2$; $x=100$ (произошла потеря корня $x=-100$ из-за того, что формулу $\lg x^2=2\lg x$ применили без модуля). *Ответ:* ±100

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.1.
«Уравнение с одной переменной»

Часть 1

Ответом на задания В1–В18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

В1

В1. Заданы уравнения:
1) $x^2 - 1 = 0$;
2) $3(x + 3) = 2x + 7$;
3) $(3 - x)(3 + x) = 1$;
4) $-4x + 8 = 16 - (x + 2)$.
Укажите номер уравнения, решением которого является число -1.

В2

В2. Среди чисел 1; -1; 5; -6 выберите и запишите в ответ то число, которое является решением уравнения $x^2 - 5x - 6 = 0$.

В3

В3. Заданы пары уравнений:
1) $7(x - 3) = 49$ и $x - 3 = 42$;
2) $2x - 7 = 0$ и $2x = -7$;
3) $\dfrac{2x}{3} = 9$ и $2x = 3$;
4) $x^2 = 5x - 6$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$
Выберите и запишите в ответ номер пары уравнений, которые являются равносильными.

В4

В4. Решите уравнения:
1) $12x - 1 = 35$;
2) $-x + 4 = 47$;
3) $1{,}3x = 54 + x$;
4) $7 = 6 - 0{,}2x$.
В ответ запишите номер уравнения, решением которого является наибольший из найденных корней.

В5

В5. Решите уравнение $\dfrac{6x+7}{7} + x = \dfrac{80+4x}{5} - \dfrac{30-2x}{2}$.

В6

В6. Решите уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$. В ответ запишите разность между бо́льшим и меньшим корнями.

B7. Решите уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. В ответ запишите произведение корней данного уравнения.

B7

B8. Решите уравнение $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) = -1$. В ответ запишите сумму корней данного уравнения.

B8

B9. Решите уравнение $1+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{6}{x^2-1}=\dfrac{3}{x+1}$.

B9

B10. Решите уравнение $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=3\dfrac{1}{3}$. В ответ запишите произведение корней данного уравнения.

B10

B11. Решите уравнение $(x - 2)^3 + (1- x) = -1$. В ответ запишите разность между бо́льшим и меньшим корнями данного уравнения.

B11

B12. Решите уравнение $|x + 3| = 2$. В ответ запишите произведение найденных корней.

B12

B13. Решите уравнение $|x^2 - x - 8| = -x$. В ответ запишите наибольший корень данного уравнения.

B13

B14. Решите уравнение $|x + 1| + |x - 2| = 3$. В ответ запишите наибольший корень данного уравнения.

B14

B15. Найдите наибольшее значение квадратного трехчлена $-3x^2 + 12x$.

B15

B16. Найдите наименьшее значение квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 6$.

B16

B17. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 + 6x + q = 0$ удовлетворяют условию $x_2 = 2x_1$. Найдите q.

B17

B18. Известно, что коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$ (где $c \neq 0$) являются его корнями. Найдите $\dfrac{b}{c}$.

B18

2.3. Общие приемы решения уравнений

2.3.1. Разложение на множители

Применение этого метода основано на том, что уравнение $f(x)\cdot\varphi(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ \varphi(x)=0 \end{array}\right.$ в области определения уравнения $f(x)\cdot\varphi(x)=0$.

Иррациональные уравнения

Пример. Решите уравнения:

а) $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$; б) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0$.

Решение.

а) $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$; ОДЗ: $2x-1\ge 0$, $x\ge 0{,}5$.

$$(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0;\ \left[\begin{array}{l} x^2-1=0; \\ 2x-1=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\pm 1; \\ x=0{,}5. \end{array}\right.$$

$x=-1$ — не входит в ОДЗ. Следовательно, $x=0{,}5$; $x=1$.

Ответ: 0,5; 1.

б) ОДЗ: $x^2-x-2\ge 0$; $(x-2)(x+1)\ge 0$; $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0.\ \left[\begin{array}{l} x-1=0; \\ x^2-x-2=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=2,\ x=-1. \end{array}\right.$$

$x=1$ — не входит в ОДЗ. Следовательно, $x=2$, $x=-1$.

Ответ: 2; –1.

Тригонометрические уравнения

Пример. Решите уравнение:

$\sin 2x-\sin x=0$.

Решение.

$\sin 2x-\sin x=0$; $2\sin\dfrac{2x-x}{2}\cos\dfrac{2x+x}{2}=0$;

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0;\ \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2}=0; \\ \cos\dfrac{3x}{2}=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=\pi n,\ n\in Z; \\ \dfrac{3x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi n,\ n\in Z; \\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi n$, $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3}$, $n,k\in Z$.

Показательные уравнения

Пример 1. Решите уравнение:

$2^{5x}-2^{4x}-2^{3x}+2^{2x}+2^x-1=0$.

Решение.

$2^{5x}-2^{4x}-2^{3x}+2^{2x}+2^x-1=0$; $(2^{5x}-2^{4x})-(2^{3x}-2^{2x})+$
$+(2^x-1)=0$; $2^{4x}(2^x-1)-2^{3x}(2^x-1)+(2^x-1)=0$;

$(2^x-1)(2^{4x}-2^{3x}+1)=0$; $\left[\begin{array}{l}2^x-1=0;\\2^{4x}-2^{2x}+1=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=0;\\ \text{решений нет.}\end{array}\right.$

Ответ: 0.

Пример 2. Решите уравнение:

$36^x-6^x=0$.

Решение.

$36^x-6^x=0$; $6^x(6^x-1)=0$; $\left[\begin{array}{l}6^x=0;\\6^x-1=0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}6^x=0 \text{ — решений нет;}\\6^x=1;\end{array}\right.$

$6^x=1$; $x=0$.

Ответ: 0.

Логарифмические уравнения

Пример 1. Решите уравнение:

$\log_5^2 x-\log_5 x=0$.

Решение.

$\log_5^2 x-\log_5 x=0$; $\log_5 x(\log_5 x-1)=0$;

$\left[\begin{array}{l}\log_5 x=0;\\\log_5 x-1=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=5^0;\\x=5^1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=1;\\x=5.\end{array}\right.$

Ответ: 1; 5.

Пример 2. Решите уравнение:

$(x^2-1)\log_3(x+1)=0$.

Решение.

ОДЗ: $x+1>0$; $x>-1$.

$(x^2-1)\log_3(x+1)=0$; $\left[\begin{array}{l}x^2-1=0;\\\log_3(x+1)=0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=\pm1;\\x+1=1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pm1;\\x=0;\end{array}\right.$ $x=-1$ — не входит в ОДЗ. Следовательно, $x=0$, $x=1$.

Ответ: 0; 1.

2.3.2. Замена переменной

Это довольно распространенный метод. С его помощью повторяющееся выражение заменяют одной переменной, решают полученное уравнение относительно этой новой переменной и возвращаются к начальной переменной, делая обратную замену.

Иррациональные уравнения

Например: $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-6x+18}=9$.

Пусть $x^2-6x+9=t$, тогда $x^2-6x+18=t+9$, $t\geq0$.

Получаем уравнение: $\sqrt{t}+\sqrt{t+9}=9$. Решаем его способом изоляции квадратного корня:

$\sqrt{t+9}=9-\sqrt{t}$; $\left(\sqrt{t+9}\right)^2=\left(9-\sqrt{t}\right)^2$; $t+9=81-18\sqrt{t}+t$; $18\sqrt{t}=72$; $\sqrt{t}=4$; $\left(\sqrt{t}\right)^2=4^2$; $t=16$.

Тогда $x^2-6x+9=16$; $x^2-6x-7=0$; $x_1=-1$; $x_2=7$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x = -1$; $x = 7$.

Рассмотрим другое уравнение, которое можно решить методом замены переменной:

$\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = x^2 - 4x - 6$.

Приведем уравнение к виду:

$\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = \frac{1}{2}(2x^2 - 8x + 12) - 12$.

Пусть $t = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$, $t > 0$. Получим $t = \frac{1}{2}t^2 - 12$; $t^2 - 2t - 24 = 0$; $t_1 = 6$; $t_2 = -4$ — не подходит, т. к. $t > 0$.

Сделаем обратную замену: $\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 6$.

$2x^2 - 8x + 12 = 36$;

$x^2 - 4x + 6 = 18$;

$x^2 - 4x - 12 = 0$;

$x_1 = 6$; $x_2 = -2$.

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 6$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$

В этом случае обе части возводят в степень $k = \text{НОК}(n,\ m)$ — наименьшее общее кратное чисел m и n.

Например, $\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x+3}$. ОДЗ: $x - 1 \geq 0$; $x \geq 1$.

Возведем обе части в степень НОК(2; 3) = 6.

$(x-1)^3 = (x+3)^2$; $x^3 - 4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Подбором находим: $x_1 = 5$.

Тогда $x^3 - 4x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x^2 + x + 2) = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x - 5 = 0; \\ x^2 + x + 2 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 5; \\ \text{решений нет.} \end{array}\right.$

Ответ: 5.

Тригонометрические уравнения

Если уравнение, содержащее две или более тригонометрические функции, удается свести к какой-либо одной ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и др.), то после соответствующей замены переменной тригонометрическое уравнение преобразуется в алгебраическое относительно сделанной замены переменной. Если алгебраическое уравнение удается решить, то тем самым исходное уравнение сводится к одному или к совокупности нескольких простейших уравнений.

Особо отметим тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным.

Пример 1. Решите уравнение: $\sin x + 2\cos^2 x - 1 = 0$.

Решение. Заменив $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим:

$\sin x + 2\,(1 - \sin^2 x) - 1 = 0$, $-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$,

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Выполнив замену $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, получим квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$.

Решив это уравнение, найдем $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$. Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, n,\ k \in Z\right\}$.

Пример 2. Решите уравнение: $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$.

Решение. Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда $t + \frac{3}{t} = 4$; $t^2 - 4t + 3 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$.

Имеем:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = 3$; $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $n, k \in Z$.

Если уравнение содержит одно из выражений $(\sin x + \cos x)$ или $(\sin x - \cos x)$ и функцию $\sin 2x$ (или произведение $\sin x \cos x$), то, вводя новую переменную $t = \sin x + \cos x$ или $t = \sin x - \cos x$, приходим к уравнению относительно t.

Это связано с тем, что, если обозначить

$$t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$$
$$2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$$

Если обозначить

$$t = \sin x - \cos x \Rightarrow t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2.$$

П р и м е р 3. Решите уравнение:
$5(\sin x + \cos x)^2 - 13\,(\sin x + \cos x) + 8 = 0.$
Решение. Обозначив $t = \sin x + \cos x$, тогда $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$, получаем:

$$5t^2 - 13t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t_1 = 1 & \text{(а)} \\ t_2 = 1{,}6. & \text{(б)} \end{array}\right.$$

Рассмотрим каждое из уравнений в отдельности.

а) $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos x\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$.

Заметим, что уравнение $\sin x + \cos x = 1$ можно было бы решать, применяя формулы $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ и $1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, т. е.

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m\pi,\ m \in Z \\ 1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m\pi,\ m \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Этот ответ совпадает с полученным ранее, т.к., полагая $n = 2m$ и $n = 2k + 1$, получаем совпадение ответов.

б) $\sin x + \cos x = 1{,}6 \Leftrightarrow$ решений нет, поскольку число $1{,}6 > \sqrt{2}$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + n\pi \,\middle|\, n \in Z\right\}$.

Показательные уравнения

Сведение к одной и той же показательной функции

П р и м е р. Решите уравнение: $3^x + 3^{x+1} = 108$.
Решение. $3^x + 3^{x+1} = 108 \Leftrightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 = 108 \Leftrightarrow 3^x \cdot (1 + 3) = 108 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{108}{4} = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Решение показательных уравнений, сводящихся к квадратным или алгебраическим уравнениям высших степеней

Уравнения вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C$ с помощью подстановки $a^x = y$ сводятся к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$, где $y > 0$.

Пример 1. Решите уравнение: $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

Решение. Обозначив $5^x = y > 0$, получаем $y^2 - 6y + 5 = 0$, корни которого $y_1 = 5$, $y_2 = 1$. Отсюда исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} 5^x = 5 \\ 5^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{1; 0\}$.

Уравнения вида $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ с помощью подстановки $a^{f(x)} = y$ сводятся к алгебраическому (квадратному) уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

Пример 2. Решите уравнение: $3^{2x^2} - 12 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0$.

Решение. Пусть $3^{x^2} = y$, тогда $3^{2x^2} = (3^{x^2})^2 = y^2$, $y \geq 1$.

Подставив в исходное уравнение, получаем:

$y^2 - 12y + 27 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 3,\ y_2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2} = 3 \\ 3^{x^2} = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ответ: ± 1; $\pm\sqrt{2}$.

Решение показательных уравнений, сводящихся к алгебраическим уравнениям высших степеней

Пример. Решите уравнение: $8^x - 2^{x+1} - 4 = 0$.

Решение. $8^x = (2^3)^x = (2^x)^3$, $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$.

Обозначив $2^x = y$, $y > 0$, получаем:

$y^3 - 2y - 4 = 0$; $(y - 2)(y^2 + 2y + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 2 = 0 \\ y^2 + 2y + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ \text{решений нет} \end{array}\right.$, $y = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Ответ: 1

Логарифмические уравнения

Решение логарифмических уравнений методом замены переменной

При решении уравнений этим методом необходимо обратить внимание на следующее:

$$\log_a^2(x^2) = (\log_a x^2)^2 = (2\log_a |x|)^2 = 2^2(\log_a |x|)^2 = 4\log_a^2 |x|;$$

$$\log_a^2 x^3 = (\log_a x^3)^2 = (3\log_a x)^2 = 3^2 \log_a^2 x = 9\log_a^2 x.$$

В общем случае $\log_a^n x^m = (\log_a x^m)^n = (m\log_a x)^n = m^n \log_a^n x$, где $x > 0$, если m — нечетное число. Если $m = 2k$ (m — четное число), то при $x \neq 0$

$$\log_a^n x^m = \log_a^n x^{2k} = (2k)^n \cdot \log_a^n |x| = m^n \log_a^n |x|.$$

Пример. Решите уравнение: $2\ \lg^2(x^3) - 3\ \lg x - 1 = 0$.

Решение. $\lg^2(x^3) = (3\ \lg x)^2 = 3^2\ (\lg x)^2 = 9\ \lg^2 x$.

Отсюда исходное уравнение равносильно такому:

$2 \cdot 9\ \lg^2 x - 3\ \lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow 18\ \lg^2 x - 3\ \lg x - 1 = 0$.

Пусть $\lg x = t$. Тогда $18t^2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 18}}{2 \cdot 18} = \dfrac{3 \pm 9}{36} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \\ t_2 = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = \frac{1}{3} \\ \lg x = -\frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^{\frac{1}{3}} \\ x = 10^{-\frac{1}{6}} \end{array}\right. .$$

Ответ: $10^{-\frac{1}{6}}, 10^{\frac{1}{3}}$.

2.3.3. Использование свойств функций

Если нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x0 \geq a$, $g(x) \leq a$, то равенство $f(x) = g(x)$ возможно в случае $\begin{cases} f(x) = a; \\ g(x) = a. \end{cases}$

Если нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке x, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то уравнение может иметь не более одного корня на этом промежутке.

Иррациональные уравнения

Пример 1. Решите уравнение:

$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 4x - x^2 - 4$.

Решение.

$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 4x - x^2 - 4;$

$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = -(x^2 - 4x + 4);$

$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = -(x - 2)^2;$

так как $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0$, а $-(x - 2)^2 \leq 0$, то получаем:

$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0; \\ -(x - 2)^2 = 0; \end{cases}$ $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение:

$\sqrt{x - 7} + \sqrt[3]{x} = 3$.

Решение.

ОДЗ: $x - 7 \geq 0$, $x \geq 7$. $\sqrt{x - 7} + \sqrt[3]{x} = 3$; $\sqrt{x - 7} = 3 - \sqrt[3]{x}$.

Если $x \geq 7$, то $f(x) = \sqrt{x - 7}$ — возрастающая, а $g(x) = 3 - \sqrt[3]{x}$ — убывающая, следовательно, уравнение $\sqrt{x - 7} + \sqrt[3]{x} = 3$ имеет единственный корень, $x = 8$.

Ответ: 8.

Тригонометрические уравнения

Решение тригонометрических уравнений с использованием ограниченности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

Решая подобные уравнения, нередко приходят к системам тригонометрических уравнений.

Пример. Решите уравнение: $\cos\frac{x}{2} + \cos 2x = 2$.

Решение. Так как $\cos\frac{x}{2}$, $\cos 2x$ имеют наибольшее значение, равное 1, то сумма их равна 2 тогда и только тогда, когда $\cos\frac{x}{2}=1$, $\cos 2x = 1$ одновременно. Отсюда исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos\frac{x}{2}=1\\ \cos 2x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4n\pi, n\in Z\\ x=k\pi, k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow x=4n\pi, n\in Z$

(поскольку серия решений $x = 4n\pi$, $n \in Z$ полностью входит в серию $x=k\pi, k\in Z$).

Ответ: $\{4n\pi,\ n \in Z\}$.

Показательные уравнения

Решение показательных уравнений методом подбора

При решении показательных уравнений этим методом сначала находят путем подбора корень исходного уравнения, а затем доказывают, что этот корень — единственный, используя свойства монотонности показательной функции.

Пример 1. Решите уравнение: $6^x + 8^x = 10^x$.

Решение. Подбором находим, что $x = 2$ — корень исходного уравнения. Покажем, что других корней нет. Разделив исходное уравнение на 10^x, получаем равносильное уравнение:

$$\frac{6^x}{10^x}+\frac{8^x}{10^x}=\frac{10^x}{10^x}\Leftrightarrow\left(\frac{6}{10}\right)^x+\left(\frac{8}{10}\right)^x=1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1.$$

а) Покажем, что среди чисел $x < 2$ корней нет. Если $x < 2$, то

$\left(\frac{3}{5}\right)^x>\left(\frac{3}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^x>\left(\frac{4}{5}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1\Rightarrow$ при $x < 2$ корней нет.

б) Покажем, что среди чисел $x > 2$ корней исходного уравнения также нет. Если $x > 2$, то

$\left(\frac{3}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{4}{5}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1\Rightarrow$ при $x > 2$ исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: $\{2\}$.

Пример 2. Решите уравнение: $2^{|x|} = \sin x^2$.

Решение. $2^{|x|} \ge 1$ для всех $x \in R$, $|\sin x^2| \le 1$.

Следовательно, уравнение равносильно системе $\begin{cases}2^{|x|}=1;\\ \sin x^2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}|x|=0;\\ x^2=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$

Ответ: решений нет.

Логарифмические уравнения

Пример. Решите уравнение: $\log_5 x = \sqrt{1-x^2}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}x>0;\\ 1-x^2\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0;\\ x^2\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0;\\ |x|\le 1;\end{cases}$ $0 < x \le 1$.

На ОДЗ функция $y = \log_5 x$ — возрастающая, а функция $y=\sqrt{1-x^2}$ — убывающая, поэтому уравнение $\log_5 x=\sqrt{1-x^2}$ имеет один корень, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

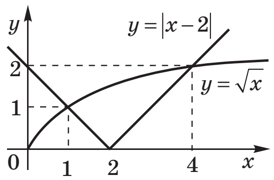
2.3.4. Использование графиков

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ очень проста: нужно построить графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций. Если, например, одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень.

Иррациональные уравнения

П р и м е р. Решите уравнение: $\sqrt{x} = |x-2|$.



Решение. Графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=|x-2|$ изображены на рисунке. Они пересекаются в точках А (1; 1) и В (4; 2). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Тригонометрические уравнения

П р и м е р. Решите уравнение: $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Ее графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины параболы найдем из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2; 2x - 2 = 0;$$

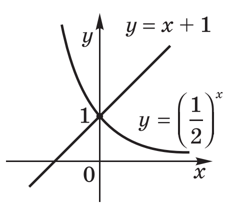
$$x = 1, y(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 2 = 1.$$

Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получим $y_{\text{наим.}} = 1$. В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством $y_{\text{наиб.}} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$

Ответ: 1.

Показательные уравнения

П р и м е р. Решите уравнение: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = x + 1$.



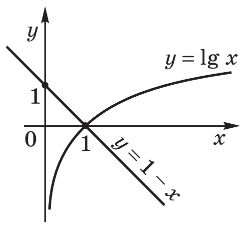
Решение. Построив в одной системе координат графики $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ и $y = x + 1$, замечаем, что они имеют одну общую точку (0; 1). Значит, уравнение $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = x + 1$ имеет единственный корень: $x = 0$.

Ответ: 0.

Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений графическим способом необходимо помнить, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0).

П р и м е р. Решите уравнение: $\lg x = 1 - x$.



Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = \lg x$ и $y = 1 - x$, замечаем, что они имеют одну общую точку (1; 0). Значит, уравнение $\lg x = 1 - x$ имеет единственный корень: $x = 1$.

Ответ: 1.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.3. «Общие приемы решения уравнений»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | B7 | B8 | B9

B1. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$. В ответ запишите, сколько из найденных корней принадлежат промежутку $[0;\ 2\pi]$.

B2. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = x^2$?

B3. Решите уравнение $\lg x = 1 - x$.

B4. Решите уравнение $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$. В ответ запишите, сколько корней данного уравнения принадлежат промежутку $[-\pi;\ \pi]$.

B5. Решите уравнение $\log_2^2 x - 3\log_2 x = 4$. В ответ запишите произведение корней.

B6. Решите уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x = 0$. В ответ запишите, сколько корней данного уравнения принадлежат промежутку $[0;\ 2\pi]$.

B7. Решите уравнение $\cos x(\mathrm{tg}\ x - 1) = 0$. В ответ запишите количество корней данного уравнения, которые принадлежат промежутку $[-\pi;\ \pi]$.

B8. Решите уравнение $3^{2x} - 4 \cdot 3^x = 45$.

B9. Решите уравнение $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$. В ответ запишите сумму найденных корней.

B10. Решите уравнение $4^{x+1} - 6^{x} = 2 \cdot 3^{2x+2}$.

B10

B11. Решите уравнение $\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75$. В ответ запишите количество корней данного уравнения, которые принадлежат промежутку $[0;\ 2\pi]$.

B11

B12. Решите уравнение $\cos 7x + \cos x = 0$. В ответ запишите количество корней данного уравнения, которые принадлежат промежутку $[-\pi;\ \pi]$.

B12

B13. Решите уравнение $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^{x} + \left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^{x} = 12$. В ответ запишите сумму найденных корней.

B13

B14. Решите уравнение $x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$. В ответ запишите сумму найденных корней.

B14

B15. Решите уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{3x+10}} + \dfrac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

B15

B16. Решите уравнение $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$.

B16

B17. Решите уравнение $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 12$.

B17

B18. Решите уравнение $3 \cdot 16^{x} + 2 \cdot 81^{x} = 5 \cdot 36^{x}$. В ответ запишите сумму найденных корней.

B18

2.4. Решение простейших уравнений

2.4.1. Решение иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений

Решение иррациональных уравнений

Уравнение, в котором переменная находится под знаком корня, называется иррациональным. При решении таких уравнений чаще всего их сводят к рациональным.

При **решении иррациональных уравнений необходимо помнить,** что:

1. В уравнении корни четной степени — арифметические, поэтому значение корня неотрицательное, подкоренное выражение — неотрицательное, например: уравнение $\sqrt{x-3}=-2$ корней не имеет, потому что $\sqrt{x-3}\geq 0$ всегда.

2. Все корни нечетной степени определены для любого подкоренного выражения, значение корня имеет тот же знак, что и подкоренное выражение:

$$\sqrt[3]{x+7}=3;\ \left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3=3^3;\ x+7=27;\ x=20.$$

3. Решение иррациональных уравнений надо начинать с нахождения **области определения** уравнения, если в него входят корни четной степени.

Область определения, (или область допустимых значений — это множество всех действительных чисел *x*, при которых одновременно имеют смысл выражения, входящие в уравнение.

Корни уравнения, не удовлетворяющие исходному уравнению, называются **посторонними.**

4. Чтобы исключить полученные в результате неравносильных преобразований посторонние корни, необходимо сделать проверку решений.

5. К появлению посторонних корней могут привести такие преобразования, как возведение в четную степень обеих частей, которые равны по абсолютным значениям, но могут отличаться знаком.

Следует заметить, что формальное использование формул типа

$$\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}\ \text{ или }\ \sqrt[2n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}$$

может привести к сужению области определения уравнения в целом и потере корней.

Основные методы решения иррациональных уравнений

Возведение обеих частей уравнения в степень

Например: $\sqrt{9-x}=x+3$.

Поскольку в уравнении слева — корень четной степени, то $9-x\geq 0$ и $x\leq 9$. Кроме того, правая часть уравнения должна быть неотрицательной, поскольку слева имеем арифметический корень.

$x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$. Тогда область значений переменной: $x\in[-3;\ 9]$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$9-x=(x+3)^2 \Rightarrow x^2+6x+9+x-9=0;\ x(x+7)=0;\ x_1=0;\ x_2=-7$. Но $x_2\notin[-3;\ 9]$. *Ответ:* $x=0$.

«Изоляция» квадратного корня

Этот метод используется в тех случаях, когда он упрощает решение уравнения. Например: $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$.

ОДЗ: $\begin{cases}x+2\geq 0;\\ 3-x\geq 0;\end{cases}$ $x\in[-2;\ 3]$.

Изолируем один квадратный корень:

$\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{3-x}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$x + 2 = 9 - 6\sqrt{3-x} + 3 - x \Rightarrow 5 - x = 3\sqrt{3-x}$.

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$25 - 10x + x^2 = 9(3 - x) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2$.

Проверка показывает, что оба числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x = -1;\ x = 2$.

«Изоляция» кубического корня

Например: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$.

Областью определения этого уравнения являются все действительные числа. Изолируем один из корней и возведем в куб обе части уравнения:

$$x - 1 + 3\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x - 2 = 2x - 3;$$

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0; \\ x-2=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1; \\ x_2=2; \end{array}\right.$$

или $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = 0;\ \sqrt[3]{x-1} = -\sqrt[3]{x-2}$;

$x - 1 = -(x - 2);\ x_3 = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $x = 1;\ x = 2;\ x = 1{,}5$.

Решение уравнений вида $\boldsymbol{\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}}$

В этом случае обе части возводят в степень $k = \text{НОК}(n,\ m)$ — наименьшее общее кратное чисел m и n.

Например, $\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x+3}$. ОДЗ: $x - 1 \geq 0;\ x \geq 1$.

Возведем обе части в степень НОК(2; 3) = 6.

$(x - 1)^3 = (x + 3)^2$;

$x^3 - 4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Подбором находим: $x_1 = 5$.

Тогда $x^3 - 4x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x^2 + x + 2) = 0$. Уравнение $x^2 + x + 2 = 0$ корней не имеет.

Проверка показывает, что $x = 5$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 5$.

Решение показательных уравнений

Уравнения вида $a^x = 1$; $a^{f(x)} = 1$; $a^{f(x)} = a^c$; $a^x = b$; $a^{f(x)} = b$; $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ называются простейшими показательными уравнениями.

При решении этих уравнений используют свойство показательной функции $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) =$
$= g(x)$,

где $a > 0$, $a \neq 1$ — предполагается, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

1) $a^x = 1 \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^0 \Leftrightarrow f(x) = 0$;
3) $a^{f(x)} = a^c \Leftrightarrow f(x) = c$;
4) $a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b$ — решение уравнения можно было бы записать сразу, так как $x = \log_a b$ следует из определения логарифма;

5) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$;
6) $a^{f(x)} = a^{g(x)} = f(x) = g(x)$.

Пример. Решите уравнение: $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 5$.

Решение. $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{7}} 5$.

Ответ: $\left\{\log_{\frac{1}{7}} 5\right\}$.

Решение логарифмических уравнений

Простейшими логарифмическими уравнениями будем называть уравнения вида:

а) $\log_a x = b$;
б) $\log_a f(x) = b$;
в) $\log_a f(x) = g(x)$;
г) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$;
д) $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$.

Рассмотрим решение этих уравнений.
Решение логарифмических уравнений основывается на свойствах логарифмической функции.
а) $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$;
б) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$;
в) $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$;
г) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

На практике при решении логарифмических уравнений вида (г) можно решать либо первую систему, либо вторую, либо третью. Достоинством первой системы является ее наглядность и очевидность, однако приходится решать два неравенства. Этого недостатка лишены вторая и третья системы; при этом лучше всего решать ту из этих двух систем, где проще решение неравенства ($f(x) > 0$ или $g(x) > 0$).

Отметим, что при решении уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ можно не пользоваться символами эквивалентности и не решать смешанные системы. При этом от исходного уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ переходим к уравнению $f(x) = g(x)$. Решая последнее уравнение, находим его корни, среди которых могут быть посторонние. Посторонние корни можно выявить либо с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения, которая задается системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

д) $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$.

На практике можно использовать любую из трех систем.

Пример. Решите уравнение: $\log_2 (4^x - 2) = x$.
Решение. $\log_2 (4^x - 2) = x \Leftrightarrow 4^x - 2 = 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x = y)$; или $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = y, \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 2 = 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2; \\ y = -1; \end{array}\right. \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 2;\ x = 1.$

Ответ: 1.

Решение тригонометрических уравнений: общая формула решения уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения

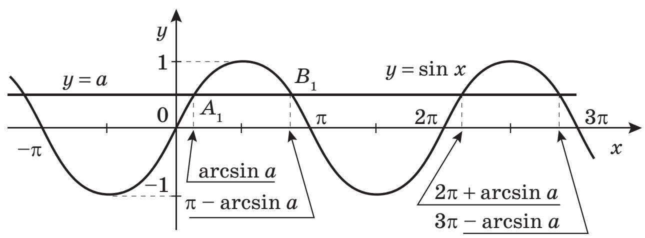
$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — значит найти множество всех аргументов, имеющих данное значение a тригонометрической функции. Если тригонометрическое уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим, решение которых определяется стандартными формулами.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение $\sin x = a$

Поскольку $|\sin x| \le 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет решение только при $|a| \le 1$. Корни уравнения $\sin x = a$ можно рассматривать как абсциссы точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ с прямой $y = a$.



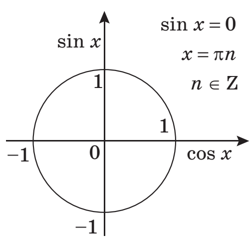
Пусть $0 < a < 1$. Тогда при $0 < x < \pi$ A_1 и B_1 — точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = a$. Абсциссы этих точек имеют координаты $\arcsin a$ и $\pi - \arcsin a$. С учетом периодичности функции $y = \sin x$ получаем две серии (два множества) решений:

$$x_1 = \arcsin a + 2k\pi,\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2k\pi =$$
$$= -\arcsin a + (2k+1)\pi,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Серии (группы) корней x_1 и x_2 можно представить одной формулой:

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Действительно, если $n = 2k \Rightarrow x = (-1)^{2k}\arcsin a + 2k\pi$ (серия корней x_1); если $n = 2k+1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = (-1)^{2k+1}\arcsin a + (2k+1)\pi = -\arcsin a + (2k+1)\pi$ (серия корней x_2).



Можно доказать, что формула $x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$, дающая решение уравнения $\sin x = a$, остается справедливой и для $-1 < a < 0$, а также для $a = 0$, $a = \pm 1$, т. е. она справедлива для $|a| \le 1$. Однако при $a = 0$, $a = \pm 1$ этой формулой пользоваться нецелесообразно.

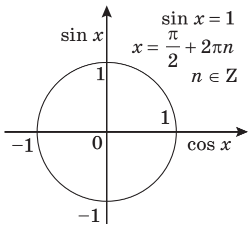
Рассмотрим, например, уравнение $\sin x = 0$. Используем тригонометрическую окружность.

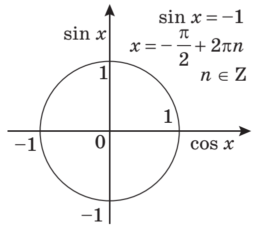
Поскольку $\sin\alpha$ — это ордината вектора единичной длины, то решить уравнение $\sin x = 0$ — это фактически найти общий вид аргументов, оканчивающихся на оси абсцисс. Это такие значения: $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi$, т. е. общий вид аргументов, оканчивающихся на оси абсцисс, есть $n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$.

Таким образом, $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$.

Решить уравнение $\sin x = 1$ — это фактически записать общий вид аргументов, оканчивающихся на положительной части оси ординат. Их можно записать так: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$.

Отсюда $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$.





Таким образом, окончательно получаем:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi,\ n \in Z;$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z;\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z.$$

Заметим, что для записи решений тригонометрических уравнений очень часто используют символику из теории множеств. Например, множество решений уравнения $\sin x = 1$ $\left(x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z\right)$ можно записать в виде $\left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z\right\}$.

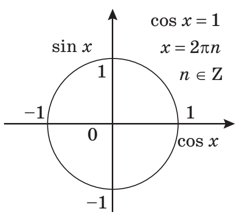
П р и м е р. Решите уравнение: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Решение.

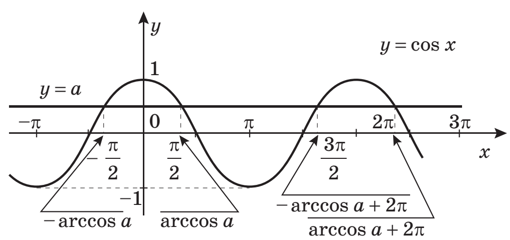
$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = n\pi \Leftrightarrow 2x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2},$

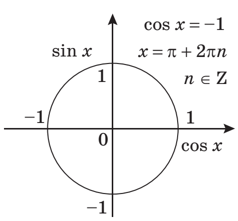
Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z.$

Уравнение $\cos x = a$



Поскольку $|\cos x| \le 1$, то уравнение имеет решение только при $|a| \le 1$. Рассуждая, как и при решении уравнения $\sin x = a$, окончательно получаем: $\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2n\pi,\ n \in Z.$





Для частных случаев $a = 0$, $a = \pm 1$ имеем:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z;$

б) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi,\ n \in Z;$

в) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2n\pi,\ n \in Z.$

П р и м е р . Решите уравнение: $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

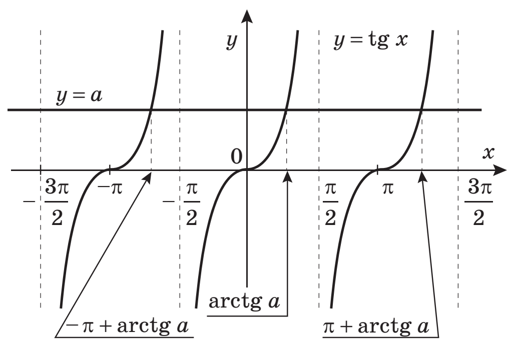
Решение.

$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2n\pi=\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}+4n\pi, n\in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+4n\pi=\frac{7\pi}{6}+4n\pi; x_2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+4n\pi=\frac{\pi}{6}+4n\pi, n\in Z.$ · *Ответ:* $\frac{7\pi}{6}+4n\pi, \frac{\pi}{6}+4n\pi, n\in Z$.

Уравнение tg *x* = *a*



Нетрудно доказать, что все корни уравнения $\mathrm{tg}\,x=a$ задаются формулой $x=\mathrm{arctg}\,a+n\pi$, $n\in Z$. Для частных случаев, когда $a=0$, $a=\pm1$, получаем:

$$a=0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,x=0 \Leftrightarrow x=n\pi,\ n\in Z;$$

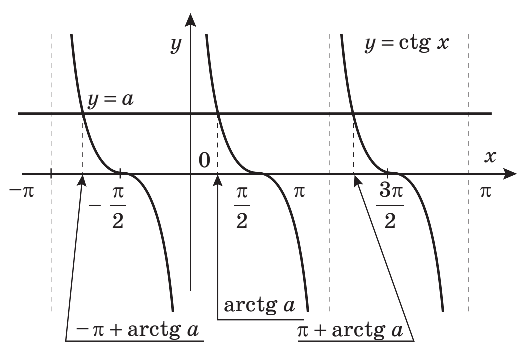
$$a=1 \Rightarrow \mathrm{tg}\,x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+n\pi, n\in Z;$$

$$a=-1 \Rightarrow \mathrm{tg}\,x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+n\pi, n\in Z.$$

П р и м е р . Решите уравнение: $\mathrm{tg}\,x=\sqrt{3}$.

Решение. $\mathrm{tg}\,x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\mathrm{arctg}\sqrt{3}+n\pi=\frac{\pi}{3}+n\pi, n\in Z$. *Ответ:* $\frac{\pi}{3}+n\pi, n\in Z$.

Уравнение ctg *x* = *a*



Нетрудно доказать, что все корни уравнения $\mathrm{ctg}\,x=a$ определяются соотношением $x=\mathrm{arcctg}\,a+n\pi$, $n\in Z$.

Для частных случаев $a=0$, $a=\pm1$ получаем:

$$a = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z;$$
$$a = 1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z;$$
$$a = -1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in Z\ .$$

Пример. Решите уравнение: $\operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

Решение. $\operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + n\pi, n \in Z; \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi, k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + n\pi = \frac{7\pi}{12} + n\pi; \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + k\pi = \frac{11\pi}{12} + k\pi; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2},\ n \in Z; \\ x = \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2},\ n \in Z;\ \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$

Таблица решений простейших тригонометрических уравнений

	$\sin x = a$	$\cos x = a$
$\lvert a\rvert < 1$	$(-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$	$\pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\lvert a\rvert > 1$	$\varnothing$	$\varnothing$
$a = 0$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$
$a = 1$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$2\pi n$
$a = -1$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$

	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$\lvert a\rvert < 1$	$\operatorname{arctg} a + \pi n$	$\operatorname{arcctg} a + \pi n$
$\lvert a\rvert > 1$	$\operatorname{arctg} a + \pi n$	$\operatorname{arcctg} a + \pi n$
$a = 0$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$
$a = 1$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$
$a = -1$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$

Во всех приведенных формулах таблицы $n \in Z$.

Отметим, что при $a = 0$, $a = \pm 1$ общими формулами также можно пользоваться, они дают верный результат, однако зачастую эти формулы не имеют компактного вида. Например, если использовать частные случаи, то $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$. Если же воспользоваться общей формулой, то $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin 1 + k\pi = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

Покажем, что $x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$ и $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ — это одно и то же множество.

Действительно, при $k = 2n \Rightarrow x = (-1)^{2n} \arcsin 1 + 2n\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$; при $k = 2n + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = (-1)^{2n+1} \arcsin 1 + (2n + 1)\pi = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$. Таким образом, множества решений, полученные двумя способами, совпадают.

2.4.2. Использование нескольких приемов при решении уравнений

Использование нескольких приемов при решении иррациональных уравнений

Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{f(x)} = h(x)$ ***или*** $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$

При решении такого уравнения обе части возводят в куб по формуле:

$$(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})^3 = a \pm b \pm 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$$

и выражение, стоящее в скобках в правой части формулы, заменяют на правую часть исходного уравнения.

Замечание. Новое уравнение, получившееся при этом преобразовании, не равносильно данному, а является уравнением-следствием. Поэтому рациональное уравнение, получившееся при этом, может иметь посторонние корни, которые отсеиваются проверкой.

Пример. Решите уравнение: $\sqrt[3]{3x + 24} - \sqrt[3]{2x + 6} = \sqrt[3]{x}$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в куб:

$3x + 24 - 2x - 6 - 3\sqrt[3]{(3x + 24)(2x + 6)}(\sqrt[3]{3x + 24)} - \sqrt[3]{2x + 6}) = x$.

Заменим выражение $(\sqrt[3]{(3x + 24)} - \sqrt[3]{2x + 6})$ на $\sqrt[3]{x}$, учитывая условие.

Получим:

$\sqrt[3]{(3x + 24)(2x + 6)x} = 6$ или $x^3 + 11x^2 + 24x - 36 = 0$.

Находим корни уравнения: $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -6$.

Проверка показывает, что $x = -6$ — посторонний корень.

Ответ: $x = 1$.

Сведение иррационального уравнения к системе рациональных уравнений

Рассмотрим пример: $\sqrt[3]{x + 7} + \sqrt[3]{28 - x} = 5$.

Пусть $\sqrt[3]{x + 7} = a$, $\sqrt[3]{28 - x} = b$, тогда $a + b = 5$.

Найдем $a^3 + b^3 = x + 7 + 28 - x = 35$.

Получим систему:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 35; \\ a + b = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 35; \\ a + b = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 6; \\ a + b = 5. \end{cases}$$

Имеем две системы:

$$\begin{cases} a = 2; \\ b = 3; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = 3; \\ b = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7=2^3; \\ 28-x=3^3; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+7=3^3; \\ 28-x=2^3; \end{cases}$$

$x=1$; $\qquad$ $x=20$.

Ответ: $x=1$; $x=20$.

Использование нескольких приемов при решении тригонометрических уравнений

Решение тригонометрических уравнений, однородных относительно синуса и косинуса, а также приводимых к однородным

Однородными тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

- $a_0\sin\alpha x + a_1\cos\alpha x = 0$ (однородные уравнения 1-й степени), $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$;
- $a_0\sin^2\alpha x + a_1\sin\alpha x\cos\alpha x + a_2\cos^2\alpha x = 0$ (однородные уравнения 2-й степени), $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$;
- $a_0\sin^3\alpha x + a_1\sin^2\alpha x\cos\alpha x + a_2\sin\alpha x\cos^2\alpha x + a_3\cos^3\alpha x = 0$ (однородные уравнения 3-й степени), $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$.

Уравнение $a_0\sin^2\alpha x + a_1\sin\alpha x\cos\alpha x + a_2\cos^2\alpha x = c$ при $c \neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному уравнению 2-й степени, заменив число c тождественно равным ему выражением $(\sin^2\alpha x + \cos^2\alpha x)\cdot c$.

Для решения однородных уравнений в случае $a_0 \neq 0$ рассмотрим такие значения x, для которых $\cos\alpha x = 0$. Тогда из исходного однородного уравнения следует, что при тех же значениях x должно быть и $\sin\alpha x = 0$, а это невозможно, т.к. противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha x + \cos^2\alpha x = 1$. Отсюда решениями однородных уравнений (при $a_0 \neq 0$) могут быть только такие значения x, для которых $\cos\alpha x \neq 0$. Таким образом, однородное тригонометрическое уравнение можно свести к уравнению относительно $\operatorname{tg}\alpha x$, если все его члены разделить на $\cos^k\alpha x$ и при этом (если $a_0 \neq 0$) такое деление не приведет к потере решений, поскольку значения x, при которых $\cos\alpha x = 0$, не удовлетворяют исходному уравнению. Если же $a_0 = 0$, то такое деление приведет к потере корней, и, значит, в ответ следует включить решения уравнения $\cos\alpha x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{n\pi}{\alpha}, n \in Z$.

П р и м е р. Решите уравнение: $2\sin x + 3\cos x = 0$.

Решение. Разделив обе части исходного уравнения на $\cos x \neq 0$, получим:

$$2\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + n\pi = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + n\pi, n \in Z.$$

Ответ: $\left\{-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + n\pi \,\middle|\, n \in Z\right\}$.

Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной подстановки $\boldsymbol{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$

При использовании универсальной подстановки функции $\sin x$, $\cos x$ выражаются через $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ по следующим формулам:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Используя подстановку $\operatorname{tg} = \frac{x}{2}$ следует обратить внимание на то, что ОДЗ левой части этих формул: $x \in R$, а ОДЗ правых частей: $\cos\frac{x}{2} \neq 0$; $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$, поэтому применяя эти формулы, необходимо отдельно рассмотреть случай $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, (проверить не являются числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, решениями исходного уравнения).

П р и м е р. Решите уравнение: $2\sin x+\cos x=2$.

Решение. Выполнив в исходном уравнении подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, получаем уравнение:

$2\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=2\Leftrightarrow 3t^2-4t+1=0\Leftrightarrow\ t_1=1,\ t_2=\frac{1}{3}.$

Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$ получаем: $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathrm{Z}$.

Из уравнения

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}.$

Остается проверить, не удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x=\pi+2m\pi$, $m\in\mathrm{Z}$. Подставляя $x=\pi+2m\pi$ в исходное уравнение, имеем:

$$2\sin(\pi+2m\pi)+\cos(\pi+2m\pi)=2\cdot 0+(-1)=-1\neq 2;$$

значит, числа $x=\pi+2m\pi$, $m\in\mathrm{Z}$ не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+2n\pi;2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2k\pi\middle|n,k\in\mathrm{Z}\right\}$.

Метод введения вспомогательного аргумента

Иногда при решении тригонометрических уравнений полезно воспользоваться формулой

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

П р и м е р. Решите уравнение: $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

Решение. Поскольку $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$, то

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow\ \ \Leftrightarrow\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi\ \ \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi, n\in\mathrm{Z}.$

В процессе решения мы учли тот факт, что если $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{1}{2}$, то φ можно положить равным $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi\middle|n\in\mathrm{Z}\right\}$.

Решение уравнений преобразованием суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

П р и м е р. Решите уравнение: $\sin\alpha x=\sin\beta x$.

Решение. $\sin\alpha x=\sin\beta x\Leftrightarrow\sin\alpha x-\sin\beta x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}=0\\ \cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{(\alpha-\beta)x}{2}=n\pi\\ \frac{(\alpha+\beta)x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi n}{\alpha-\beta}, n\in\mathrm{Z}\\ x=\frac{\pi+2k\pi}{\alpha+\beta}, k\in\mathrm{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{2n\pi}{\alpha-\beta};\frac{\pi+2k\pi}{\alpha+\beta}\middle|n,k\in\mathrm{Z}\right\}$.

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример. Решите уравнение: $\cos 3x \cos 9x = \cos x \cos 7x$.

Решение. Применив формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получаем:

$$\frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) \Leftrightarrow \cos 12x - \cos 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 10x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 10x = 0\\ \sin 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}10x = n\pi\\ 2x = k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{n\pi}{10}, n \in Z\\ x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z\end{array}\right..$$

Серия решений $x = \frac{kp}{2}$, $k \in Z$, является подмножеством серии решений $x = \frac{n\pi}{10}, n \in Z$, поэтому в ответе нужно записать $x = \frac{n\pi}{10}, n \in Z$ (при $n = 5k$ серии $x = \frac{n\pi}{10}$ и $x = \frac{k\pi}{2}$ совпадают).

Ответ: $\left\{\frac{n\pi}{10} \middle| n \in Z\right\}$.

Замечание. Поскольку элементы множеств $\frac{n\pi}{10}$ и $\frac{k\pi}{2}, n, k \in Z$, сравниваются друг с другом, то для обозначения целочисленных параметров в примере необходимо использовать различные буквы.

Тригонометрические уравнения, решаемые с применением формул понижения степени

При решении подобного рода уравнений пользуются формулами понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример. Решите уравнение: $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$.

Решение. Применив формулу понижения степени

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, получаем: $\frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} + \frac{1+\cos 10x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0 \Leftrightarrow \cos 10x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$

Применив к первым двум слагаемым формулу преобразования суммы одноименных тригонометрических функций в произведение, получаем:

$$2\cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow \cos 8x\,(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 8x = 0\\ 2\cos 2x + 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{8}, n \in Z\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{8}; \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \middle| n, k \in Z\right\}$.

Решение уравнений с применением формул двойного и тройного аргументов

Пример. Решите уравнение: $\sin 2x = \cos x$.

Решение. В левой части применим формулу $\sin 2x = \sin x \cos x$. Делить обе части полученного уравнения на $\cos x$ нельзя, поскольку это приведет к потере решений, являющихся корнями уравнения $\cos x = 0$. Получаем:

$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\sin x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z\\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi; (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi \middle| n, k \in Z\right\}$.

Тригонометрические уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

При решении уравнений с обратными тригонометрическими функциями наиболее распространенный прием — переход от равенства углов к равенству тригонометрических функций. При этом получающиеся уравнения в общем случае не будут равносильны исходным, т.к. происходит расширение области определения исходного уравнения, и, следовательно, возможно появление посторонних корней. Отсюда необходима проверка полученных решений, если не везде были равносильные преобразования.

Пример. Решите уравнение: $\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

1 способ. Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то, подставив $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ в исходное уравнение, получаем:

$$\arcsin x - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 способ. Записав исходное уравнение в виде $\arcsin x = \frac{\pi}{6} + \arccos x$, возьмем синус от обеих частей последнего уравнения:

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \arccos x\right) \Rightarrow x = \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos(\arccos x) +$$

$$+ \sin(\arccos x) \cdot \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}x \Rightarrow 3(1 - x^2) = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Проверка.

При $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\arcsin x_1 - \arccos x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — корень исходного уравнения.

При $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\arcsin x_2 - \arccos x_2 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\pi \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — посторонний корень.

Использование нескольких приемов при решении показательных уравнений

Решение показательных уравнений, приводимых к простейшим, с использованием метода уравнивания показателей степеней

Сначала приводят показательные уравнения к одному основанию в обеих частях равенства, затем уравнивают показатели степеней левой и правой частей равенства, после этого решают полученное уравнение.

Пример. Решите уравнение: $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$.

Решение. Приведем степени к одинаковому основанию, а затем приравняем показатели степеней:

$$0{,}25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}, \frac{256}{2^{x+3}} = \frac{2^8}{2^{x+3}} = 2^{5-x}.$$

Отсюда исходное уравнение эквивалентно такому:

$(2^{-2})^{2-x} = 2^{5-x} \Leftrightarrow 2^{-4+2x} = 2^{5-x} \Leftrightarrow -4 + 2x = 5 - x \Leftrightarrow x = 3$. *Ответ:* 3.

Решение уравнений вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ ($a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$)

Эти уравнения решаются путем деления обеих частей на $b^{f(x)}$ или на $a^{f(x)}$.

П р и м е р. Решите уравнение: $6^{x+1} = 37^{x+1}$.

Решение. $6^{x+1} = 37^{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{6^{x+1}}{37^{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{6}{37}\right)^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Ответ: -1.

Решение уравнений вида $A \cdot a^{f(x)} = B \cdot b^{g(x)}$

Эти уравнения сводятся к алгебраическим путем логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию.

П р и м е р. Решите уравнение: $2 \cdot 5^x = 3^{x-1} \cdot 7$.

Решение. Исходное уравнение можно решить двумя способами.

1 способ. Логарифмируем обе части по одному и тому же основанию, например, по основанию 3. Тогда имеем:

$$\log_3(2 \cdot 5^x) = \log_3(3^{x-1} \cdot 7) \Leftrightarrow \log_3 2 + \log_3(5^x) = \log_3(3^{x-1}) + \log_3 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 2 + x\log_3 5 = (x-1)\log_3 3 + \log_3 7 \Leftrightarrow \log_3 2 + x\log_3 5 = x - 1 + \log_3 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\log_3 5 - x = -\log_3 2 - 1 + \log_3 7 \Leftrightarrow x(\log_3 5 - 1) =$$

$$= \log_3 7 - \log_3 2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\log_3 \frac{7}{2} - 1}{\log_3 5 - 1} = \frac{\log_3 \frac{7}{2} - \log_3 3}{\log_3 5 - \log_3 3} = \frac{\log_3\left(\frac{7}{6}\right)}{\log_3\left(\frac{5}{3}\right)} = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right).$$

2 способ. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$2 \cdot 5^x = 3^{x-1} \cdot 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^x = \frac{3^x}{3} \cdot 7 \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x} = \frac{7}{3 \cdot 2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{7}{6} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right).$$

Как видим, ответы совпали, однако второй способ для данного примера является более рациональным.

Ответ: $\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right)$.

Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки

П р и м е р. Решите уравнение: $3^x + 3^{x+1} = 108$.

Решение. $3^x + 3^{x+1} = 108 \Leftrightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 = 108 \Leftrightarrow 3^x \cdot (1 + 3) = 108 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{108}{4} = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x =$

Ответ: 3.

Уравнения вида $Aa^x + Ba^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}} + Cb^x = 0$ (однородное уравнение) сводятся к квадратному путем деления обеих частей исходного уравнения на a^x, или на b^x, или на $(ab)^{\frac{x}{2}}$. Например, при делении на $a^x \neq 0$ имеем уравнение, эквивалентное данному:

$$A\frac{a^x}{a^x} + B\frac{a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}}}{a^x} + C\frac{b^x}{a^x} = 0 \Leftrightarrow A + B\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} + C\left(\frac{b}{a}\right)^x = 0.$$

Замена $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = y$ приводит исходное уравнение к квадратному:

$$A + By + Cy^2 = 0.$$

П р и м е р. Решите уравнение: $9 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0$.

Решение. Поскольку $12 = 3 \cdot 4$, $16 = 4^2$, $9 = 3^2$, то исходное уравнение можно записать в виде $9 \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 3^x \cdot 4^x - 16 \cdot 3^{2x} = 0$. Делим обе части исходного уравнения на $4^{2x} = 16^x$. Получаем:

$$9\cdot 16^x-7\cdot 12^x-16\cdot 9^x=0(:16^x\neq 0)\Leftrightarrow 9-7\cdot\left(\frac{12}{16}\right)^x-16\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^x=0\Leftrightarrow 9-7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-16\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)^2=0.$$

Замена $\left(\frac{3}{4}\right)^x=y>0$ приводит исходное уравнение к квадратному:

$9-7y-16y^2=0 \Leftrightarrow 16y^2+7y-9=0 \Leftrightarrow y_1=\frac{9}{16},\ y_2=-1.$

$y_2=-1$ отпадает, т. к. $y>0$.

Отсюда $y=\frac{9}{16}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\Leftrightarrow x=2.$

Ответ: 2.

Уравнения вида $M\left(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}\right)^x+N\left(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\right)^x=p,$

где $a^2-b=1$ сводятся к квадратному посредством замены

$\left(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}\right)^x=y$ или замены $\left(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\right)^x=y.$

Пример. Решите уравнение: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$

Решение. Поскольку $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1,$ то, заменив $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=y;\ y>0,$ получаем:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\left(\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}\right)^x=\left(\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}=\frac{1}{y}.$$

Отсюда исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$y+\frac{1}{y}=4\Leftrightarrow y^2-4y+1=0\Leftrightarrow y_{1,2}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}\\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3}\\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=1\\ \frac{x}{2}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right..$$

Ответ: ± 2.

Решение показательных уравнений вида

$$Aa^{nx}+Ba^{mx}b^{(n-m)x}+Cb^{nx}=0,$$
$$(a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1)$$

предполагает следующее рассуждение: в этом уравнении сумма показателей степеней чисел a и b в каждом слагаемом одинакова и равна nx.

Разделив почленно исходное уравнение на b^{nx}, получаем:

$$A\cdot\frac{a^{nx}}{b^{nx}}+B\cdot\frac{a^{mx}\cdot b^{nx}\cdot b^{-mx}}{b^{nx}}+C\cdot\frac{b^{nx}}{b^{nx}}=0\Leftrightarrow A\left(\frac{a}{b}\right)^{nx}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{mx}+C=0.$$

Обозначив $\left(\frac{a}{b}\right)^x=y,$ получаем алгебраическое уравнение $Ay^n+By^m+C=0$.

Решив это уравнение, находим его корни, а затем возвращаемся к переменной x.

Пример. Решите уравнение: $64^x+36^x-10\cdot 27^x=0$.

Решение. $64=4^3,\ 36=3^2\cdot 4,\ 27=3^3$. Отсюда исходное уравнение можно записать в виде $4^{3x}+3^{2x}\cdot 4^x-10\cdot 3^{3x}=0$. Разделив исходное уравнение почленно на $3^{3x}=27^x$, получаем:

$$\left(\frac{64}{27}\right)^x+\left(\frac{36}{27}\right)^x-10=0\Leftrightarrow\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^x-10=0\Leftrightarrow\ y^3+y-10=0\ (\text{где } y=\left(\frac{4}{3}\right)^x>0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y-2)(y^2+2y+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y-2=0\\ y^2+2y+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\ y\in\varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow y=2\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{\frac{4}{3}}2.$$

Ответ: $\log_{\frac{4}{3}}2$.

Использование нескольких приемов при решении логарифмических уравнений

Решение логарифмических уравнений потенцированием

Пример. Решите уравнение: $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$.

Решение.

$$\begin{cases}\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1\\ x+1>0\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3(x+1)(x+3)=1\\ x>-1\\ x>-3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3(x^2+4x+3)=1\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+3=3\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x=0\\ x>-1\end{cases}.$$

Ответ: 0.

Решение уравнений с применением основного логарифмического тождества:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Пример. Решите уравнение: $\log_4(2^{4x}) = 2^{\log_2 4}$.

Решение. Согласно основному логарифмическому тождеству $2^{\log_2 4} = 4$.

Тогда исходное уравнение равносильно такому:

$\log_4(2^{4x}) = 4 \Leftrightarrow 2^{4x} = 4^4 \Leftrightarrow 2^{4x} = (2^2)^4 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^8 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

Решение уравнений методом логарифмирования

Он заключается в том, что от уравнения $f(x) = g(x)$ переходят к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Метод логарифмирования обычно применяется при решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени.

Пример. Решите уравнение: $x^{\lg x} = 10$.

Решение. Логарифмируя обе части исходного уравнения по основанию 10, приходим к уравнению, равносильному исходному:

$x^{\lg x} = 10 \Leftrightarrow \lg(x^{\lg x}) = \lg 10 \Leftrightarrow \lg x \cdot \lg x = 1 \Leftrightarrow (\lg x)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x = 1\\ \lg x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 10\\ x = 10^{-1} = 0{,}1\end{array}\right.$.

Ответ: 0,1; 10.

Решение уравнений методом деления обеих частей на показательно-логарифмическую функцию

Пример. Решите уравнение: $3^{2\lg x} = 5^{3\lg x}$.

Решение.

$$3^{2\lg x} = 5^{3\lg x} \Leftrightarrow \frac{3^{2\lg x}}{5^{3\lg x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(3^2)^{\lg x}}{(5^3)^{\lg x}} \Leftrightarrow \left(\frac{3^2}{5^3}\right)^{\lg x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{125}\right)^{\lg x} = 1 \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Решение уравнений путем перехода к другому основанию

Пример. Решите уравнение: $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$.

Решение. ОДЗ $\begin{cases}x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x>1,\ x\neq 2 \Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(2;+\infty)$.

В выражении $\log_{x-1} 4$ переходим к основанию 2:

$$\log_{x-1} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)} = \frac{2}{\log_2(x-1)}.$$

Обозначив $\log_2(x-1)=t$, приходим к уравнению, эквивалентному исходному:

$$1+t=\frac{2}{t}\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)=1\\ \log_2(x-1)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\ x-1=2^{-2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{5}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: $3;\ 1\frac{1}{4}$.

Решение логарифмических уравнений комбинированными методами

Пример. Решите уравнение: $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}=32$.

Решение. Приведем два способа решения исходного уравнения.

1 способ. $2^{\log_2^2 x}=2^{\log_2 x\cdot\log_2 x}=(2^{\log_2 x})^{\log_2 x}=x^{\log_2 x}$.

Обозначив $x^{\log_2 x}=t;\ t>0,$ получаем: $t+t=32\Leftrightarrow t=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{\log_2 x}=16\Leftrightarrow\log_2(x^{\log_2 x})=\log_2 16\Leftrightarrow(\log_2 x)^2=4\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\ \log_2 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^2=4\\ x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: $4;\frac{1}{4}$.

2 способ. Обозначив $\log_2 x=y$, получаем: $x=2^y$, $2^{\log_2^2 x}=2^{y^2}$. Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$2^{y^2}+(2^y)^y=32\Leftrightarrow 2^{y^2}+2^{y^2}=32\Leftrightarrow 2^{y^2}=\frac{32}{2}=16=2^4\Leftrightarrow y^2=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\ \log_2 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^2=4\\ x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: $4;\ \frac{1}{4}$.

2.4.3. Решение комбинированных уравнений (например, показательно-логарифмических, показательно-тригонометрических, логарифмически степенных, дробно-рациональных относительно степенной функции)

Решение тригонометрических уравнений вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Пример. Решите уравнение: $\sqrt{\cos x}=\sin x$.

Решение.

$$\sqrt{\cos x}=\sin x\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \cos x\ge 0\\ \left(\sqrt{\cos x}\right)^2=(\sin x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\\ \cos^2 x+\cos x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\\ x=\pm\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2n\pi,\ n\in \mathrm{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2n\pi,\ n\in \mathrm{Z},$$

т. к. вторая серия решений со знаком «–» не удовлетворяет неравенству $2k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

Ответ: $\left\{\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2n\pi\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

Замечание. Если быть более точным, то

$$\sqrt{\cos x} = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 = (\sin x)^2 \end{cases}.$$

Однако такая эквивалентность (без лишнего неравенства $\cos x \geq 0$ в системе) обладает меньшей наглядностью, чем эквивалентность, приведенная в решении примера.

Замечание. При решении тригонометрических уравнений вида $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), их сводят к системам вида $\begin{cases} f(x) = 0; \\ \varphi(x) \neq 0; \end{cases}$ т. е. необходимо исключать из решения те значения x, для которых $\varphi(x)$ обращается в нуль.

Пример. Решите уравнение: $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = 0.$

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x = 0; \\ 1 - \cos x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi, n \in Z; \\ x \neq 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Отсюда $n\pi \neq 2\pi k \Rightarrow n \neq 2k$, т. е. подходят только $n = 2k + 1$. Таким образом, $x = (2k + 1)\pi = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

Ответ: $\pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

Степенно-показательными уравнениями называются уравнения вида:

$$(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{g(x)}.$$

Корнями таких уравнений считаются решения смешанной системы:

$$\begin{cases} f(x) > 0; \\ f(x) \neq 1; \\ \varphi(x) = g(x); \end{cases}$$

и те значения x, для которых $f(x) = 1$, если при этих значениях определены $\varphi(x)$ и $g(x)$.

Замечание. Поскольку мы предполагаем, что функции вида $(f(x))^{\varphi(x)}$ определены только при $f(x) > 0$, то те значения x, которые формально удовлетворяют уравнению $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{g(x)}$, но при которых $f(x) \leq 0$, мы не будем считать корнями степенно-показательного уравнения.

Следует, однако, отметить, что если условием предполагается возможность $f(x) \leq 0$, то при решении степенно-показательных уравнений $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{g(x)}$ нужно рассматривать также случай, когда $f(x) \leq 0$, что значительно усложняет *решение.*

Рассмотрим сначала **степенно-показательные уравнения упрощенного вида** $(f(x))^{\varphi(x)} = 1$.

Это уравнение сводится к совокупности двух уравнений: $f(x) = 1$, $\varphi(x) = 0$. Решениями исходного уравнения являются решения этих двух уравнений, для которых выражения $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и $f(x) > 0$.

Таким образом,

$$(f(x))^{\varphi(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 1; \\ \varphi(x) = 0; \end{array}\right. \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Пример. Решите уравнение: $(x + 8)^{x^2 + 2x - 8} = 1.$

Решение. Приведем две формы записи решения.

1-я форма записи решения.

Находим ОДЗ: $x + 8 > 0 \Leftrightarrow x > -8$.

При $x + 8 = 1 \Leftrightarrow x = -7$. Значение $x = -7$ удовлетворяет исходному уравнению (и при $x = -7$ выражение $x^2 + 2x - 8$ определено). Отсюда $x = -7$ — корень. Решив уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$, получаем корни $x = 2$, $x = -4$, которые удовлетворяют условию $x + 8 > 0$.

2-я форма записи решения.

$$(x+8)^{x^2+2x-8}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+8=1 \\ x^2+2x-8=0, \end{array}\right. \\ x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2;\ x=-4, \end{array}\right. \\ x>-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x_1=-7,\ x_2=2,\ x_3=-4.$

Ответ: –7; –4; 2.

2.4.4. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, чаще всего применяют следующие методы:

а) раскрытие модуля по определению;

б) возведение обеих частей уравнения в квадрат;

в) метод интервалов (промежутков).

Отметим свойства модуля, которые нередко используются на практике:

$$|x| \geq 0,\ |x| \geq x,\ |xy| = |x| \cdot |y|,\ |x|^2 = x^2,$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ |-x| = |x|,\ |-f(x)| = |f(x)|.$$

Прежде чем начать решать уравнение с модулем, заметим, что уравнение $|f(x)|=a$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$, если $a \geq 0$. Если же $a<0$, то уравнение $f|(x)|=a$ решений не имеет.

П р и м е р. Решите уравнение: $|2x-1|=|x-1|$.

Решение. Исходное уравнение с двумя модулями можно решать методом интервалов, который рассмотрен ниже, однако для данного уравнения быстрее всего приводит к цели способ возведения обеих частей уравнения в квадрат, с учетом того, что $|f(x)|^2=(f(x))^2$.

Имеем: $|2x-1| = |x-1| \Leftrightarrow |2x-1|^2 = |x-1|^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(3x-2)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=\dfrac{2}{3}.$

Ответ: 0; $\dfrac{2}{3}$.

Метод интервалов (промежутков) при решении уравнений с модулями

Этот метод заключается в следующем:

1) приравниваются к нулю выражения, стоящие под знаком модуля;
2) полученные значения наносим на числовую прямую, которая при этом разбивается на интервалы (промежутки), в каждом из которых — свой знак подмодульного выражения;
3) решаются полученные уравнения в каждом из интервалов.

На практике метод интервалов обычно применяется, когда уравнение содержит более одного модуля.

Рассмотрим применение метода интервалов на конкретном примере.

П р и м е р. Решите уравнение: $|x+2|+|x-4|=5x-20$.

Решение. $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$; $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$. Наносим на числовую прямую точки $x=-2$ и $x=4$. Эти точки разбивают прямую на три интервала (промежутка), в каждом из которых свой знак подмодульного выражения. Обозначим эти интервалы I, II, III, где I: $x<-2$; II: $-2 \leq x \leq 4$; III: $x>4$.

Для интервала I имеем:

$|x+2|=-(x+2)=-x-2$; $|x-4|=-(x-4)=-x+4$.

Отсюда получаем решение уравнения в I интервале:
$-x - 2 - x + 4 = 5x - 20 \Leftrightarrow -2 + 4 + 20 = x + x + 5x \Leftrightarrow 22 = 7x \Leftrightarrow x = \dfrac{22}{7}$.

Однако значение $x = \dfrac{22}{7}$ не принадлежит I интервалу, где $x < -2$, иначе говоря, $\dfrac{22}{7} \notin (-\infty; -2)$, отсюда исходное уравнение $|x + 2| + |x - 4| = 5x - 20$ — в I интервале решений не имеет.

Для II интервала $|x + 2| = x + 2$, $|x - 4| = -(x - 4) = -x + 4$, тогда исходное уравнение имеет вид:

$x + 2 + (-x + 4) = 5x - 20 \Rightarrow 5x = 2 + 4 + 20 = 26 \Leftrightarrow x = \dfrac{26}{5}$.

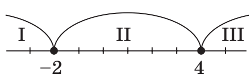
Однако $\dfrac{26}{5}$ не входит в интервал $-2 \le x \le 4$, значит, во II интервале исходное уравнение решений не имеет.

Для III интервала $|x + 2| = x + 2$; $|x - 4| = x - 4$, тогда исходное уравнение имеет вид:
$x + 2 + x - 4 = 5x - 20 \Leftrightarrow 2 - 4 + 20 = -x - x + 5x \Leftrightarrow 18 = 3x \Leftrightarrow x = 6$.

Так как 6 входит в интервал $x > 4$, то $x = 6$ является решением исходного уравнения.

Ответ: $\{6\}$.

Замечание. Решение примера можно записать в следующей форме, применяя понятие совокупности смешанных систем, т. е. систем, содержащих уравнения и неравенства:
$|x + 2| + |x - 4| = 5x - 20$.



Имеем три интервала — I: $x < -2$; II: $-2 \le x \le 4$; III: $x > 4$. Отсюда, в зависимости от того, в каком интервале мы ищем решение, исходное уравнение равносильно совокупности следующих смешанных систем:

$$\begin{cases} x < -2 \\ -(x+2) - (x-4) = 5x - 20 \end{cases}; \begin{cases} -2 \le x \le 4 \\ x + 2 - (x-4) = 5x - 20 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x + 2 + x - 4 = 5x - 20 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x < -2 \\ x = \dfrac{22}{7} \end{cases}; \begin{cases} -2 \le x \le 4 \\ x = \dfrac{26}{5} \end{cases}; \begin{cases} x > 4 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Первая и вторая системы решений не имеют (это означает, что в I и во II интервалах решений нет), т. к. $\dfrac{22}{7} \notin (-\infty; -2)$, $\dfrac{26}{5} \notin [-2; 4]$, а третья система имеет решение $x = 6$.

Ответ: 6.

Пример. Решите уравнение: $\log_3 |2x - 1| = 2$.

Решение. $\log_3 |2x - 1| = 2 \Leftrightarrow |2x - 1| = 3^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 9 \\ 2x - 1 = -9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -4 \end{array} \right.$.

Ответ: 5; -4.

2.4.5. Уравнения с параметрами

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $2^x - a = 4$ имеет единственное решение?

Решение. Пусть $2^x = t$, $t > 0$, тогда

$$|t - a| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t - a > 0; \\ t = 4 + a; \\ t > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} t - a < 0; \\ t = a - 4; \\ t > 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 + a > a; \\ t = a + 4; \\ a + 4 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a - 4 < a; \\ t = a - 4; \\ a - 4 > 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 > 0; \\ t = a + 4; \\ a > -4; \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < 0; \\ t = a - 4; \\ a > 4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Первая система имеет решение при $a > -4$, а вторая при $a > 4$. Исходное уравнение имеет единственное решение, если имеет решение только первая система совокупности.

Ответ: $-4 < a \le 4$.

П р и м е р 2. Для каждого значения параметра m решите уравнение: $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = m\,(1 + 4^{x-2})$.

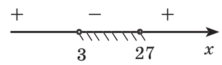
Решение. Выполнив замену $t = 4^{x-2}$, $t > 0$, получим уравнение:

$3t + 27 = m(1 + t)$; $3t + 27 = m + tm$; $3t - tm = m - 27$;
$t(3 - m) = m - 27$.

Если $m = 3$, то уравнение не имеет решений, т. к. $t \cdot 0 \neq -27$.

Если $m \neq 3$, то $t = \dfrac{m-27}{3-m}$. Учтем условие $t > 0$, т. е.

$\dfrac{m-27}{3-m} > 0$ или $\dfrac{m-27}{m-3} < 0$.



Неравенство верно при $m \in (3;\ 27)$.

Тогда $4^{x-2} = \dfrac{m-27}{3-m}$. Получим, что $x = \log_4 \dfrac{m-27}{3-m} + 2$.

Ответ: $x = \log_4 \dfrac{m-27}{3-m} + 2$ при $m \in (3;\ 27)$.

Решений нет, если $m \in (-\infty;\ 3] \cup [27;\ +\infty)$.

П р и м е р 3. При каких значениях параметра a уравнение $\log_2 (4^x - a) = x$ имеет единственный корень?

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $4^x - a = 2^x$, т. е. $2^{2x} - a = 2^x$.

Выполним замену: $2^x = t$, $t > 0$. Получим уравнение: $t^2 - t - a = 0$.

Условие задачи будет выполняться тогда и только тогда, когда уравнение имеет единственный положительный корень. Это будет в одном из следующих случаев:

а) уравнение имеет единственный корень, и он положительный;

б) уравнение имеет два корня, но один из них положительный, а второй — отрицательный или нуль.

Для случая (а) получим: $\begin{cases} D = 0; \\ t_0 > 0, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} 1 + 4a = 0; \\ t_0 = \dfrac{1}{2} > 0. \end{cases}$ Имеем: $a = -\dfrac{1}{4}$.

Для случая (б) имеем:

1) при $t = 0$ уравнение имеет корень $a = 0$. При $a = 0$ уравнение имеет корни $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Условие задачи при $a = 0$ выполняется;

2) уравнение имеет разные знаки тогда и только тогда, когда $f(0) < 0$ (где $f(t) = t^2 - t - a$), т. е. $-a < 0$ и $a > 0$. Объединим все результаты.

Ответ: при $a = -\dfrac{1}{4}$ или $a \geq 0$ уравнение имеет единственный корень.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.4. «Решение простейших уравнений»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)=-3$.

B2. Решите уравнение $\log_2(\sqrt{x}-2)=1$.

B3. Решите уравнение $x+2=\sqrt{x+4}$.

B4. Решите уравнение $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{5-4x}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-14}$.

B5. Укажите, сколько действительных корней имеет уравнение $x^2-|x|=0$.

B6. Решите уравнение $\sqrt[5]{2^{5x-2}}=\dfrac{32}{\sqrt{32}}$.

B7. Решите уравнение $\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}$. В ответ запишите количество корней данного уравнения, которые принадлежат промежутку $[-\pi;\ \pi]$.

B8. Решите уравнение $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$. В ответ запишите количество корней данного уравнения, которые принадлежат промежутку $[0;\ 2\pi]$.

B9. Решите уравнение $\cos 3x=-\dfrac{1}{2}$. В ответ запишите (в градусах) наибольший отрицательный корень данного уравнения.

B10. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 8x = \sqrt{3}$. В ответ запишите (в градусах) наименьший положительный корень данного уравнения.

B10

B11. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{10+x} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x-23}$.

B11

B12. Решите уравнение $\cos^3 x + \sin^3 x = 0$. В ответ запишите количество корней данного уравнения, принадлежащих промежутку $[0; \pi]$.

B12

B13. Решите уравнение $x^{\lg x} = 100x$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их произведение.

B13

B14. Решите уравнение $49^{|2-3x|} = 7^{11-12x}$. В ответ запишите количество корней данного уравнения.

B14

B15. Решите уравнение $50 \cdot 7^{\sqrt{-5x}} - 7^{\sqrt{-20x}+1} - 7 = 0$.

B15

B16. Решите уравнение $\log_2(4-3x) = 6^{\frac{3}{\log_2 6}}$.

B16

B17. Решите уравнение $\log_5 x + 2 \log_{0,2} x = 1$.

B17

B18. Решите уравнение $\sqrt{3\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$. В ответ запишите наибольший корень данного уравнения.

B18

2.5. Системы уравнений с двумя переменными

Систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}.$$

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют **систему уравнений**, если ставится задача найти множество общих решений этих уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases}.$$

Множество упорядоченных пар, троек (в случае систем с тремя переменными) и т.д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется **решением системы уравнений.**

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется **определенной**, если она имеет конечное число решений, и **неопределенной**, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две системы называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными. Если система из n линейных уравнений содержит n неизвестных, то возможны следующие три случая:

1) система не имеет решений;
2) система имеет одно решение;
3) система имеет бесконечное множество решений.

Не решая системы линейных уравнений, можно определить количество ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных. Так, для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

имеем:

а) если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение; геометрически это решение иллюстрируется как точка пересечения двух прямых, являющихся графиками уравнений системы;

б) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений; в этом случае прямые, являющиеся графиками уравнений системы, параллельны и не совпадают;

в) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений; в этом случае прямые совпадают.

Основными методами решения систем уравнений являются следующие:

1) метод подстановки; 2) метод алгебраического сложения (или метод преобразования системы); 3) метод замены переменных; 4) графический метод.

При решении системы **методом подстановки** сначала из какого-нибудь уравнения выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение системы, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной, затем решают это уравнение и находят соответствующее значение второй переменной.

При решении системы **методом алгебраического сложения** переходят от данной системы к равносильной ей, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную. При этом обычно умножают одно или оба уравнения на числовые множители таким образом, чтобы коэффициенты при x или y были одинаковыми, но с противоположными знаками.

Пример. Решите систему уравнений: $\begin{cases}2x+5y=12\\3x-4y=-5.\end{cases}$

Решение. Решим исходную систему двумя способами: методом подстановки и методом алгебраического сложения.

1 способ (метод подстановки). $\begin{cases}2x+5y=12 & (а)\\3x-4y=-5 & (б)\end{cases}$

Из уравнения (а) $y=\dfrac{12-2x}{5}$.

Подставляя в уравнение (б), получаем:

$$3x-4\left(\frac{12-2x}{5}\right)=-5 \Leftrightarrow 15x-48+8x=-25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23x=23 \Leftrightarrow x=1,\ y=\frac{12-2x}{5}=\frac{12-2}{5}=2.$$

Итак, окончательно $x = 1$, $y = 2$.

2 способ (метод алгебраического сложения). Решая этим способом, умножим первое уравнение системы на 3, а второе на (–2), и сложим:

$$\begin{cases}2x+5y=12\\3x-4y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x+15y=36\\-6x+8y=10\end{cases} \Rightarrow 6x + 15y - 6x + 8y = 36 + 10 \Leftrightarrow 23y = 46 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2,\ x=\frac{12-5y}{2}=\frac{12-10}{2}=1,\ \text{окончательно } x = 1,\ y = 2.$$

Заметим, что решение исходной системы методом подстановки можно было бы оформить следующим образом, используя только равносильные преобразования и символ $\Leftrightarrow$.

$$\begin{cases}2x+5y=12\\3x-4y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{12-2x}{5}\\3x-4\left(\dfrac{12-2x}{5}\right)=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y-\dfrac{12-2x}{5}\\15x-4(12-2x)=-25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{12-2x}{5}\\x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\x=1.\end{cases}$$

Ответ: $\{(1;\ 2)\}$.

2.5.1. Системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения

Пример 1. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\\sqrt{x}-\sqrt{y}=2.\end{cases}$

Решение. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\\sqrt{x}-\sqrt{y}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}=4+2,\\\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=4-2;\end{cases}$

$$\begin{cases}2\sqrt{x}=6,\\2\sqrt{y}=2;\end{cases}\ \begin{cases}\sqrt{x}=3,\\\sqrt{y}=1;\end{cases}\ \begin{cases}x=9,\\y=1.\end{cases}$$

Ответ: (9; 1).

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2,\\\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8.\end{cases}$$

Решение.

Введем новые переменные: $\sqrt[4]{x+y}=a,\ \sqrt[4]{x-y}=b.$

Тогда

$$\begin{cases} a-b=2, \\ a^2-b^2=8; \end{cases} \begin{cases} a-b=2, \\ (a-b)(a+b)=8; \end{cases} \begin{cases} a-b=2; \\ 2(a+b)=8; \end{cases} \begin{cases} a-b=2, \\ a+b=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b+a+b=4+2, \\ a+b-a+b=4-2; \end{cases} \begin{cases} 2a=6, \\ 2b=2; \end{cases} \begin{cases} a=3, \\ b=1. \end{cases}$$

Возвращаясь к данным переменным, получаем:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=3, \\ \sqrt[4]{x-y}=1; \end{cases} \begin{cases} x+y=81; \\ x-y=1; \end{cases} \begin{cases} x+y+x-y=81+1; \\ x+y-x+y=81-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=82; \\ 2y=80; \end{cases} \begin{cases} x=41; \\ y=40. \end{cases}$$

Ответ: (41; 40).

2.5.2. Системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения

Рассмотрим некоторые приемы, используемые при решении тригонометрических систем. Ограничимся системами с двумя переменными.

1. Системы, содержащие уравнения вида $x+y=a$ или $x-y=a$, подстановкой можно свести к одному уравнению.

Пример 1. $\begin{cases} \sin(x-y)=2\sin x\sin y; \\ x+y=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения получим $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ и подставим в первое уравнение:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=2\sin x\cos x;$$

$$-\cos 2x=\sin 2x;\ \operatorname{tg} 2x=-1;$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Тогда $y=\dfrac{5\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{5\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z.$

2. В предыдущем примере получаемые соотношения между переменным x и y и множество решений системы записывались с помощью только одного целочисленного параметра. Обычно при решении систем появляются два параметра, т. к. употребление одного параметра может привести к потере корней.

Пример 2. $\begin{cases} \cos x\cos y=\dfrac{3}{4}; \\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Решение. Почленно сложим и вычтем уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} \cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}; \\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=1; \end{cases} \begin{cases} \cos(x-y)=\dfrac{1}{2}; \\ \cos(x+y)=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z; \\ x + y = 2\pi n,\ n \in Z. \end{cases}$$

Очевидно, что применение одного целочисленного параметра ($m = n$) приведет к потере корней; получим совокупность систем, которую решим методом почленного сложения и вычитания уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z; \\ x + y = 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z; \\ x + y = 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi(m + n); \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(n - m); \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k + n); \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \pi(n - k). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi(m + n);\ -\dfrac{\pi}{6} + \pi(n - m)\right)$;

$\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi(k + n);\ \dfrac{\pi}{6} + \pi(n - k)\right)$; $m,\ n,\ k \in Z$.

3. В случаях, когда система содержит только две тригонометрические функции или приводится к такому виду, можно использовать введение новых переменных.

П р и м е р 3. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1; \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$

Решение. Преобразуем второе уравнение:

$1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\cos^2 y = 1$; $\sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}$.

Обозначим $\sin x = u$; $\cos y = v$. Получим: $\begin{cases} u + v = 1; \\ u^2 + v^2 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ $u \in [-1;\ 1]$, $v \in [-1;\ 1]$.

Легко установить, что такая система имеет единственное решение: $u = \dfrac{1}{2}$ и $v = \dfrac{1}{2}$.

Поэтому $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}; \\ \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z; \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left((-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n;\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; $n,\ k \in Z$ (подразумевается, что знак в формуле для y выбирается произвольно).

4. В ряде случаев для решения системы ее преобразуют с помощью почленного сложения, вычитания, умножения, деления уравнений с целью, например, исключить одну из переменных, сделать замену переменных, разложить на множители и др.

П р и м е р 4. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1; \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

Решение. Преобразуем уравнения системы по формулам суммы синусов и разности косинусов:

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2} = \dfrac{1}{2}; \\ \sin\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Замена: $\dfrac{x+y}{2}=u$; $\dfrac{x-y}{2}=v$. Тогда имеем: $\begin{cases}\sin u\cos v=\dfrac{1}{2};\\ \sin u\sin v=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Ясно, что если $(u;\ v)$ — решение системы, то $\cos v\sin u=\dfrac{1}{2}\neq 0$.

Поэтому разделим почленно второе уравнение на первое получаем:

$\operatorname{tg} v=-\sqrt{3}$; $v=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$;

тогда $\sin u\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\dfrac{1}{2}$ или $\sin u\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right)=\dfrac{1}{2}$;

$$\sin u\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ или } \sin u\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2};\ \sin u=1 \text{ или } \sin u=-1;$$

откуда $u=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z$. Тогда $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}+2\pi m;\\ \dfrac{x-y}{2}=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n.\end{cases}$

Ответ: $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}+\pi(2m+n)$;

$y=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\pi(2m-n),\ m,\ n\in Z$.

2.5.3. Системы, содержащие одно или два показательных уравнения

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используют традиционные методы решения систем уравнений: **метод подстановки и метод замены переменных**.

Пример 1. $\begin{cases}x+y=1;\\ 4^x+4^y=5.\end{cases}$

Решение. Используем метод подстановки.

Из первого уравнения $y=1-x$ подставим это выражение во второе уравнение:

$4^x+4^{1-x}=5$; $4^x+\dfrac{4^1}{4^x}=5$. Замена: $4^x=t,\ t>0$.

Получим уравнение: $t+\dfrac{4}{t}=5$ или $t^2-5t+4=0$; $t_1=1$; $t_2=4$.

Обратная замена: $4^x=1$, тогда $x=0$; $y=1$. $4^x=4$; $x=1$; $y=0$.

Ответ: (0; 1); (1; 0).

Пример 2. $\begin{cases}5^x-3^y=16;\\ 5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}=2.\end{cases}$

Решение. Выполним замену: $5^{\frac{x}{2}}=t$; $3^{\frac{y}{2}}=z$; $t>0, x>0$, получим систему:

$\begin{cases}t^2-z^2=16;\\ t-z=2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(t-z)(t+z)=16;\\ t-z=2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(t+z)=16;\\ t-z=2;\end{cases}$

$\begin{cases}t+z=8;\\ t-z=2;\end{cases}$ $2t=10$; $t=5$; $z=3$.

Обратная замена: $5^{\frac{x}{2}}=5$; $\dfrac{x}{2}=1$; $x=2$; $3^{\frac{y}{2}}=3$, $\dfrac{y}{2}=1$; $y=2$.

Ответ: (2; 2).

2.5.4. Системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения

Как и логарифмические уравнения, системы логарифмических уравнений можно решать как с помощью систем-следствий (каждое решение первой системы является решением второй системы), так и с помощью равносильных преобразований (все решения каждой из них являются решениями другой).

Кроме того, при решении систем логарифмических уравнений можно использовать традиционные для обычных систем методы: алгебраического сложения, подстановки некоторого выражения из одного уравнения в другое, замены переменных и др.

При использовании систем-следствий необходимо делать проверку полученных решений по начальной системе.

Пример 1. Решите систему: $\begin{cases}\log_2(xy) = 2;\\ \log_3(y - x) = 1.\end{cases}$

Решение. По определению логарифма $\begin{cases}xy = 2^2;\\ y - x = 3.\end{cases}$

Из второго уравнения системы выразим $y = x + 3$ и подставим в первое:

$x(x + 3) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0;$ $\begin{cases}x_1 = 1;\\ y_1 = 4;\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2 = -4;\\ y_2 = -1.\end{cases}$

Проверка показывает, что (1; 4) — решение данной системы, (–4; –1) — тоже решение.

Ответ: (–4; –1).

Пример 2. Решите систему: $\begin{cases}x^{\log_y x} \cdot y = x^{\frac{5}{2}};\\ \log_4 y \cdot \log_y(y - 3x) = 1.\end{cases}$

Решение. Приведем первое уравнение к более простому виду, возьмем от обеих частей логарифм по основанию y:

$\log_y(x^{\log_y x} \cdot y) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \log_y x^{\log_y x} + \log_y y = \frac{5}{2}\log_y x;$

$\log_y^2 x - \frac{5}{2}\log_y x + 1 = 0.$ Замена: $t = \log_y x.$

Получим уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$, корни: $t_1 = 2;$ $t_2 = \frac{1}{2}$, тогда $\log_y x = 2$ и $x = y^2$, или $\log_y x = \frac{1}{2}$, тогда $x = \sqrt{y}$, т. е. $y = x^2$.

Приведем второе уравнение к более простому виду: перейдем от логарифма по основанию y к логарифму по основанию 4:

$\log_4 y \cdot \frac{\log_4(y - 3x)}{\log_4 y} = 1 \Rightarrow \log_4(y - 3x) = 1$ и $y - 3x = 4.$

Получаем совокупность двух систем: $\begin{cases}x = y^2;\\ y - 3x = 4;\end{cases}$ $\begin{cases}y = x^2;\\ y - 3x = 4.\end{cases}$

Первая система не имеет решений, вторая система имеет два решения: (4; 16); (–1; 1).

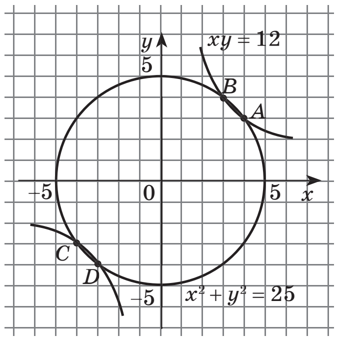
Проверка: решение системы должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases}x > 0;\\ y > 0;\\ y - 3x > 0;\\ y \neq 1.\end{cases}$$

Решение (4; 16) этой системе удовлетворяет, а (–1; 1) — нет.

Ответ: (4; 16).

2.5.5. Использование графиков при решении систем



Чтобы решить систему уравнений с двумя переменными графически, нужно построить графики уравнений системы в одной системе координат и найти координаты общих точек графиков.

Например, решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ xy = 12. \end{cases}$$

Решение. $x^2 + y^2 = 25$ — окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 5.

$xy = 12 \Rightarrow y = \dfrac{12}{x}$ — гипербола.

Графики уравнений пересеклись в точках $A(4; 3)$, $B(3; 4)$, $C(-4; -3)$, $D(-3; -4)$.

Ответ: (4; 3); (3; 4); (–4; –3); (–3; –4).

2.5.6. Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические)

Пример. $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18; \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$ ОДЗ: $x > 0$; $y > 0$.

Решение. На ОДЗ первое уравнение равносильно:

$(3^{\log_3 x})^{\log_3 y} + (3^{\log_3 y})^{\log_3 x} = 18;$

$3^{\log_3 y \cdot \log_3 x} + 3^{\log_3 x \cdot \log_3 y} = 18;\ \ 2 \cdot 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18;\ \ 3^{\log_3 x \log_3 y} = 9;\ \ \log_3 x \cdot \log_3 y = 2.$

Получим систему: $\begin{cases} \log_3 x \log_3 y = 2; \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

Замена: $\log_3 x = t$; $\log_3 y = z$, тогда

$\begin{cases} tz = 2; \\ t + z = 3, \end{cases}$ очевидно, что $\begin{cases} t = 2; \\ z = 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} t = 1; \\ z = 2. \end{cases}$

Обратная замена: $\begin{cases} \log_3 x = 1; \\ \log_3 y = 2; \end{cases}$ или $\begin{cases} \log_3 x = 2; \\ \log_3 y = 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x = 3; \\ y = 9; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 9; \\ y = 3. \end{cases}$

Найденные решения входят в ОДЗ.
Ответ: (3; 9); (9; 3).

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ: $x - y > 0$.

$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 2^2 \cdot 3^5, \\ x - y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 3, \\ 3^x \cdot 2^{x-3} = 2^2 \cdot 3^5; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 3, \\ 6^x = 6^5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$

Выполнив проверку, убедимся, что (5; 2) — решение данной системы.
Ответ: (5; 2).

П р и м е р 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg\sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$$

Выполним замену:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = u,\ u > 0, \\ \sqrt{y} = v,\ v > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} 2u - v = 4, \\ uv = 30, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v = 2u - 4, \\ u(2u-4) = 30, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v = 2u - 4, \\ u^2 - 2u - 15 = 0, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = 5, \\ u = -3, \end{array}\right. \\ v = 2u - 4, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 5, \\ v = 6. \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} \sqrt{x} = 5, \\ \sqrt{y} = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 25, \\ y = 36. \end{cases}$

Выполнив проверку, убедимся, что (25; 36) — решение данной системы.

Ответ: (25; 36).

2.5.7. Системы уравнений с параметром

П р и м е р . Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (a+1)x + 8y = 4a, \\ ax + (a+3)y = 3a - 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} (a+1)x + 8y = 4a, \\ ax + (a+3)y = 3a - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{4a - (a+1)x}{8}, \\ ax + (a+3)\cdot\dfrac{4a-(a+1)x}{8} = 3a - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4a - (a+1)x}{8}, \\ 8ax + 4a^2 + 12a - (a^2 + 4a + 3)x = 24a - 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4a - (a+1)x}{8}, \\ (a^2 - 4a + 3)x = 4(a^2 - 3a + 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4a - (a+1)x}{8}, \\ (a-3)(a-1)x = 4(a^2 - 3a + 2). \end{cases}$$

Если $a = 3$, то $\begin{cases} y = \dfrac{12 - 4x}{2} \\ 0x = 8; \end{cases}$ — система решений не имеет.

Если $a = 1$, тогда $\begin{cases} y = \dfrac{4-2x}{8}, \\ 0x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{2-x}{4} \\ 0x = 0; \end{cases}$ — система имеет бесконечное множество решений $\left(c; \dfrac{2-c}{4}\right), c \in \mathrm{R}$.

Если $a \neq 1$, $a \neq 3$, тогда

$$x = \frac{4(a^2-3a+2)}{(a-3)(a-1)} = \frac{4(a-1)(a-2)}{(a-3)(a-1)} = \frac{4(a-2)}{a-3}; \quad y = \frac{1-a}{a-3}.$$

Ответ: Если $a \neq 1$, $a \neq 3$, то система имеет единственное решение $\left(\dfrac{4(a-2)}{a-3}; \dfrac{1-a}{a-3}\right)$;

если $a = 3$, то система решений не имеет;

если $a = 1$, то система имеет бесконечное множество решений $\left(c; \dfrac{2-c}{4}\right)$, $c \in \mathrm{R}$.

2.5.8. Системы, содержащие одно или два рациональных уравнения

Однородные системы уравнений

Система двух уравнений с двумя переменными называется **однородной**, если левые части ее уравнений, содержащие переменные, являются однородными многочленами степени n от двух переменных. Однородная система с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = a \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = b \end{cases}.$$

Однородные системы решаются с помощью методов алгебраического сложения и введения новых переменных.

П р и м е р. Решите систему: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$.

Решение. Умножим первое уравнение на 13:

$13x^2 - 39xy + 13y^2 = -13$, и сложим со вторым:

$16x^2 - 40xy + 16y^2 = 0$.

Разделив обе части полученного уравнения на 8, имеем:

$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$.

Таким образом, получаем следующую систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \end{cases}.$$

Второе уравнение последней системы можем разделить на $x^2 \neq 0$ $(x \neq 0)$, так как если положить $x = 0$, то получим $y = 0$, а пара $(0; 0)$ не удовлетворяет первому уравнению последней системы.

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 : x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Выполнив замену $\dfrac{y}{x} = t$, получим:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\dfrac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$ или $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2y$.

Поэтому исходная система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ y = 2x \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x = 2y \end{cases}.$$

Первая система имеет решения: (1; 2), (–1; –2);
вторая — (2; 1), (–2; –1).

Ответ: {(1; 2); (–1; –2); (2; 1); (–2; –1)}.

Симметрические системы уравнений

Выражение $f(x, y)$ называется **симметрическим**, если при замене x на y, y на x оно не изменяется.

Примеры симметрических выражений:

$f(x, y) = x + y$; $f(x, y) = x^2 + y^2$; $f(x, y) = x^3 + y^3$; $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$; $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 2y^2$.

Все симметрические выражения с двумя переменными выражаются через основные симметрические многочлены, Например:

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy;$$
$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy;$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) =$$
$$= (x + y)((x + y)^2 - 3xy) =$$
$$= (x + y)^3 - 3\,(x + y)\,xy.$$

Симметрической системой уравнений называется система, все уравнения которой симметрические. Решать симметрическую систему можно, например, с помощью замены переменных, где новыми переменными являются основные симметрические многочлены.

Пример. Решите систему: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$.

Решение. Поскольку $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, то, выполнив замену $x + y = u$, $xy = v$, приходим к следующей системе: $\begin{cases} u^2 - 2v = 34 \\ u + v = 23 \end{cases}$.

Из этой системы находим: $\begin{cases} u_1 = 8 \\ v_1 = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} u_2 = -10 \\ v_2 = 33 \end{cases}$.

Отсюда исходная система эквивалентна следующей совокупности систем:
$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 33 \end{cases}$.

Первая система совокупности имеет решения (3; 5); (5; 3); вторая система решений не имеет.

Ответ: {(3; 5); (5; 3)}.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.5. «Системы уравнений с двумя переменными»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1 ____

B1. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 1; \\ 2x - y = 1. \end{cases}$ В ответ запишите x_0y_0, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B2 ____

B2. Сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ xy = -12 \end{cases}$?

B3 ____

B3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7; \\ 2^x - 3^y = 1. \end{cases}$ В ответ запишите $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B4 ____

B4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 5; \\ x - y = 7. \end{cases}$ В ответ запишите $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B5 ____

B5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y - x = 14; \\ \log_2 x + \log_2 y = 5. \end{cases}$ В ответ запишите $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B6 ____

B6. Сколько решений имеет система $\begin{cases} y^2 = x; \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$?

B7 ____

B7. Сколько решений имеет система $\begin{cases} |x + y| = 2; \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$?

B8 ____

B8. Найдите расстояние от точки пересечения прямых $5x - 2y = -25$ и $-4x + 3y = 27$ до оси ординат.

B9 ____

B9. Найдите расстояние (с точностью до целых) от точки пересечения графиков уравнений $x + y = 5$ и $x^2 - xy + y^2 = 13$ до начала координат.

B10 ____

B10. При каком наибольшем целом значении m система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ x - y = m \end{cases}$ имеет два решения?

B11. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4^{x+9} = 128; \\ x^{3x-2y} = 1. \end{cases}$ В ответ запишите $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B11

B12. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-3| + y = 0; \\ 3x - y = 5. \end{cases}$ В ответ запишите $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B12

B13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{y-9} = 2; \\ \sqrt{y+7} - \sqrt{x-9} = 2. \end{cases}$ В ответ запишите $x_0 + y_0$, где пара $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B13

B14. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108; \\ 3^x \cdot 2^y = 72. \end{cases}$ В ответ запишите $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

B14

B15. При каком наибольшем значении a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ y - |x| = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

B15

B16. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a+3)x + 4y = 3a - 5; \\ ax + (a-1)y = 2 \end{cases}$ не имеет решений?

B16

B17. Найдите все значения параметра a, при котором система уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 4; \\ y = -5 \end{cases}$ имеет единственное решение. В ответ запишите их сумму.

B17

B18. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ y = x^2 + a \end{cases}$ имеет единственное решение. Если таких значений несколько, то в ответ запишите их сумму.

B18

2.6. Неравенства с одной переменной

Неравенством с одной переменной называется неравенство, содержащее одну независимую переменную.

Пусть дано неравенство с одной переменной $f(x) > g(x)$ (вместо знака «>» могут быть знаки «<», «≤» «≥»). Областью определения неравенства $f(x) > g(x)$ называется пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Решением неравенства называется всякое значение переменной, при котором исходное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с переменной — значит найти все его решения или доказать, что их нет. Два неравенства с одной переменной называются **равносильными (эквивалентными)**, если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства равносильны, если они не имеют решений.

При решении неравенств пользуются **основными теоремами о равносильности неравенств.**

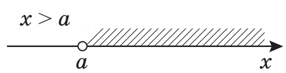
1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное исходному.
2. Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить (или вычесть) любую функцию $\varphi(x)$, то получится неравенство, равносильное исходному, при условии, что области определения полученного и исходного неравенств совпадают.
3. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить (или разделить) на любую функцию $\varphi(x)$, сохраняющую постоянный знак и отличную от нуля, то при $\varphi(x) > 0$ получится неравенство, равносильное исходному, а при $\varphi(x) < 0$ равносильным исходному будет неравенство противоположного смысла (предполагается, что области определения полученного и исходного неравенств совпадают).

Замечание. На практике при применении 2-й и 3-й теорем чаще всего вместо функции $\varphi(x)$ берется ее частный случай — константа, отличная от нуля.

Геометрическая интерпретация неравенств

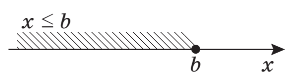
Решение неравенств можно показать геометрически на числовой оси. Так, если мы имеем строгое неравенство $x > a$, то геометрически множество его решений изображается в виде той части числовой прямой, которая лежит справа от точки с абсциссой $x = a$. При этом правее точки $x = a$ наносят штриховку, а саму точку $x = a$ обычно изображают в виде светлого кружка (говорят, что точку $x = a$ «выкалывают»):

$x > a \Leftrightarrow x \in (a; \infty).$



Если имеем нестрогое неравенство $x \le b$, то на числовой оси наносят штриховку слева от точки $x = b$, при этом точку $x = b$ обычно закрашивают в черный цвет, т. е. изображают темной точкой:

$x \le b \Leftrightarrow x \in (-\infty; b].$

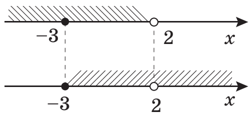


При решении систем линейных неравенств, состоящих из двух неравенств, можно изображать решения с помощью двух числовых осей или с помощью одной оси, с помощью дуг или без дуг, без штриховок или с помощью штриховок, нанося штриховки, имеющие разный угол наклона относительно числовой прямой, снизу и сверху или только сверху (снизу).

П р и м е р. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x-1<3 \\ 3x+2 \ge -7 \end{cases}$, используя геометрическую интерпретацию.

Решение. $\begin{cases} 2x-1<3 \\ 3x+2 \ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<1+3 \\ 3x \ge -2-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<4 \\ 3x \ge -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x \ge -3 \end{cases}.$

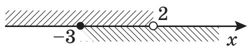
Приведем **четыре варианта геометрической интерпретации** примера.



1 вариант (с использованием двух числовых осей). На одной числовой прямой отмечаем все те значения x, при которых выполняется первое неравенство системы, а на второй числовой прямой, расположенной под первой,— все те значения x, при которых выполняется второе неравенство системы. Сравнение этих двух результатов показывает, что оба неравенства одновременно будут выполняться при всех значениях x, заключенных от (–3) до (+2), т. е. $-3 \le x < 2 \Leftrightarrow x \in [-3;\ 2)$.

2 вариант (с использованием одной числовой оси и штриховок снизу и сверху оси). На числовую ось наносим штриховки, расположенные выше и ниже числовой прямой, и находим пересечение решений неравенств, образующих исходную систему.

$$\begin{cases}2x-1<3\\3x+2\ge -7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x\ge -3\end{cases}.$$



С помощью координатной прямой находим, что множеством решений исходной системы является полуинтервал [–3; 2).

3 вариант (с использованием одной оси, дуг и штриховок).

$$\begin{cases}2x-1<3\\3x+2\ge -7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x\ge -3\end{cases}.$$

На числовую ось наносим заданные множества $x < 2$ и $x \ge -3$ при помощи дуг и штриховок с разным углом наклона к координатной прямой. Искомое множество изображено двойной штриховкой при помощи наложения двух штриховок.

4 вариант (с использованием одной оси и дуг).

$$\begin{cases}2x-1<3\\3x+2\ge -7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x\ge -3\end{cases}.$$

На числовую ось наносим заданные множества $x < 2$ и $x \ge -3$ при помощи только одних дуг, а штриховку наносим только там, где заданные множества пересекаются.

2.6.1. Рациональные неравенства

Решение рациональных неравенств методом интервалов

Неравенства вида $P_n(x) > 0$ ($P_n(x) < 0$, $P_n(x) \ge 0$, $P_n(x) \le 0$),

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0,\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0,\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\le 0\right),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней n и m, т. е.

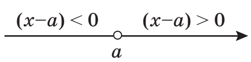
$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \ne 0.$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \ne 0$$

обычно решают методом интервалов (методом промежутков). Этот метод удобен, например, для решения неравенств следующего вида:

$$x\ (x+1) \ge 0,\ \frac{3x}{x-3}<0,\ (x-1)(x-2)(x-5) \le 0,$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x-6}\ge 0,\ \ \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x+1)(x+3)}<0.$$



В основе метода интервалов лежит следующее свойство двучлена $(x - a)$: точка $x = a$ делит числовую ось на две части.

Пусть требуется решить неравенство $(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) > 0$, где $a_1, a_2, ... , a_n$ — фиксированные числа, среди которых нет равных, причем такие, что $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$. Для решения неравенства $(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) > 0$ **методом интервалов** поступают следующим образом: на числовую ось наносят числа $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$; в промежутке справа от наибольшего из них, т. е. числа a_n, ставят знак «плюс», в следующем за ним справа налево интервале ставят знак «минус», затем — знак «плюс», далее знак «минус» и т.д.

Тогда множеством всех решений неравенства $(x - a_1)\ (x - a_2)...(x - a_n) > 0$ будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «плюс», а множеством решений неравенства $(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) < 0$ будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «минус».

Замечание 1. На практике среди двучленов встречаются выражения $(a_i - x)$, в этом случае справа от наибольшего числа $x = a_n$ уже не обязательно будет знак «плюс». Поэтому неравенства, где в левой части встречаются двучлены вида $(a_i - x)$, лучше всего решать так: найти знак левой части выражения в каком-то одном из интервалов, не обязательно крайнем справа, а дальше в соседних интервалах будут противоположные знаки.

Замечание 2. Изменение знаков левой части неравенства удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (которую называют «кривой знаков»), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком неравенства в рассматриваемом промежутке.

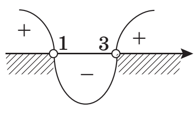
Замечание 3. Приведенные выше рассуждения справедливы и для неравенств вида $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, где $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_k)}.$$

При этом числа $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, ..., b_{k-1}, b_k$ попарно различны. Изменение знаков функции $f(x)$ иллюстрируется с помощью «кривой знаков».

П р и м е р. Решите неравенство: $(x - 1)(x - 3) > 0$.

Решение. Многочлен $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ обращается в нуль в точках $x = 1$, $x = 3$. Эти точки разбивают координатную прямую на промежутки $(-\infty; 1)$; $(1; 3)$; $(3; +\infty)$, внутри каждого из которых функция $f(x)$ сохраняет знак. Так как в промежутке $(3; +\infty)$ сомножители $(x - 1)$, $(x - 3)$ положительные, то и их произведение положительно, т. е. $f(x) > 0$. Отметим промежуток $(3; +\infty)$ знаком «+». Далее знаки в промежутках чередуются. Проводим через отмеченные точки «кривую знаков».



Иллюстрацию с помощью «кривой знаков» понимаем так: на тех промежутках, где «кривая знаков» проходит выше координатной прямой (где ставится знак «+»), выполняется неравенство $f(x) > 0$; на тех промежутках, где кривая проходит ниже прямой (где знак «−»), выполняется неравенство $f(x) < 0$. В результате получаем, что решением исходного неравенства является объединение промежутков: $(-\infty; 1)$; $(3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Обобщенный метод интервалов

Пусть требуется решить неравенство:

$$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_{n-1})^{k_{n-1}}(x-a_n)^{k_n} > 0,$$

где $k_1, k_2, ..., k_{n-1}, k_n$ — целые положительные числа; $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ — действительные числа, среди которых нет равных и такие, что $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$. Неравенства подобного вида решают с применением **обобщенного метода интервалов**. В основе этого метода лежит следующее свойство двучлена $(x - a)^n$: точка $x = a$ делит числовую ось на две части, причем если $n = 2k$ (n — четное), то выражение $(x - a)^n$ справа и слева от точки $x = a$ сохраняет положительный знак;

если $n = 2k + 1$ (n — нечетное число), то выражение $(x - a)^n$ справа от точки $x = a$ положительное, а слева от точки $x = a$ отрицательное.

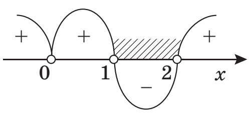
Для решения неравенства $(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_{n-1})^{k_{n-1}}(x-a_n)^{k_n} > 0$ обобщенным методом интервалов на числовую ось наносим числа a_1, $a_2, \dots,$ a_{n-1}, a_n. В промежутке справа от наибольшего из них ставим знак «+», а затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередное число a_1 меняем знак, если k_i — нечетное число, и сохраняем знак, если k_i — четное число.

Замечание 1. Если встречаются выражения $(a_i - x)^n$, то справа от наибольшего из a_i не обязательно будет знак «+». В этом случае лучше всего определить знак левой части неравенства в каком-либо из интервалов, а затем поставить знаки в каждом из интервалов с учетом изложенных выше соображений.

Замечание 2. Приведенные выше рассуждения справедливы и для неравенств вида $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \ge 0$, $\varphi(x) \le 0$, где

$$\varphi(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\dots(x-b_p)^{m_p}}.$$

П р и м е р. Решите неравенство: $x^2(x - 1)^3\,(x - 2)^5 < 0$.



Решение. Отмечаем на числовой прямой точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Проводим через эти точки «кривую знаков» с учетом того, что слева и справа от точки $x = 0$ один и тот же знак «+», так как в выражении $x^2 = 0$ показатель степени (число 2) — число четное. В окрестности точек $x = 1$ и $x = 2$ знаки в соседних промежутках чередуются, так как в выражениях $(x - 1)^3$ и $(x - 2)^5$ показатели степеней (числа 3 и 5) нечетные. Множество, дающее решение исходного неравенства, на рисунке заштриховано. Это интервал (1; 2).

Метод замены переменной при решении рациональных неравенств

Многие неравенства удобно решать, применяя метод замены переменной (метод подстановки).

П р и м е р. Решите неравенство: $(x^2 - x)^2 - 8\,(x^2 - x) + 12 < 0$.

Решение. Выполнив замену переменной $t = x^2 - x$, получаем $t^2 - 8t + 12 < 0$. Корнями уравнения $t^2 - 8t + 12 = 0$ являются $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

Отсюда $t^2 - 8t + 12 = (t - 2)(t - 6) > 0 \Leftrightarrow 2 < t < 6$.

Поскольку $t = x^2 - x$, получаем:

$$2 < x^2 - x < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > 2 & \text{(а)} \\ x^2 - x < 6 & \text{(б)} \end{cases}$$

Решаем неравенство (а):

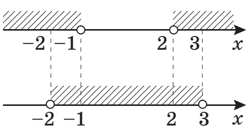
$$x^2 - x > 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right..$$

Решаем неравенство (б):

$x^2 - x < 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

Отсюда $(x^2 - x)^2 - 8\,(x^2 - x) + 12 < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - x > 2 \\ x^2 - x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right. \\ -2 < x < 3 \end{cases}.$$



Изобразим полученные множества с помощью двух координатных прямых. Решением исходного неравенства является объединение множеств (–2; –1); (2; 3).

Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (2; 3)$.

2.6.2. Показательные неравенства

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными.

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение неравенств подобного вида основано на следующих утверждениях:

- если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;
- если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Коротко можно записать:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}; \begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Заметим, что применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак «>», можно этот же метод применять и при решении неравенств, содержащих знаки «<», «≥», «≤». В частности, можно, например, записать: $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) \ge g(x) \end{cases}$.

Пример. Решите неравенство: $2^x < \frac{1}{8}$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то $2^x < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-3} \Leftrightarrow x < -3$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3)$.

Неравенства вида $a^{f(x)} > b, a > 0$

Необходимо рассмотреть два случая:

а) $b \le 0$, тогда $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow x \in D(f)$;

б) $b > 0$, тогда $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$ при $a > 1$; $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$ при $0 < a < 1$.

При $a = 1$ исходное неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно числовому неравенству $1 > b$ при $x \in D(f)$.

Пример. Решите неравенство: $2^x > 5$.

Решение. $2^x > 5 \Leftrightarrow 2^x > 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow x > \log_2 5$.

Ответ: $x \in (\log_2 5; +\infty)$.

Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{\varphi(x)}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$a^{f(x)} > b^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x) \log_a b$, если $a > 1$;

$a^{f(x)} > b^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x) \log_a b$, если $0 < a < 1$.

Пример. Решите неравенство: $2^x \ge 3^{x^2}$.

Решение. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Тогда имеем:

$$2^x \ge 3^{x^2} \Leftrightarrow \log_2(2^x) \ge \log_2(3^{x^2}) \Leftrightarrow x \ge x^2 \log_2 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 \log_2 3 \ge 0 \Leftrightarrow x(1 - x\log_2 3) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right] = [0; \log_3 2].$$

Ответ: $x \in [0; \log_3 2]$.

Решение показательных неравенств методом замены переменной

П р и м е р. Решите неравенство: $9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$.

Решение. Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда исходное неравенство равносильно такому:

$$t^2 - 12t + 27 < 0 \Leftrightarrow 3 < t < 9 \Leftrightarrow 3 < 3^x < 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3^1 < 3^x < 3^2 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $x \in (1;\ 2)$.

Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

П р и м е р. Решите неравенство: $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Решение. Исходное неравенство можно записать в виде:

$$2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0.$$

В левой части — однородные функции относительно 2^x и 5^x. Тогда можно разделить обе части исходного неравенства на 2^{2x}, 5^{2x} или на $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Разделив обе части исходного неравенства на $5^{2x} = 25^x$, получаем:

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0.$$

Обозначив $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, $t > 0$, получаем $t^2 - t - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t < -1 \\ t > 2 \end{matrix}\right.$.

Поскольку $t > 0$ и $t > 2$, исходное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$.

2.6.3. Логарифмические неравенства

Логарифмическими называются неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании.

При решении логарифмических неравенств нахождение области определения исходного неравенства не является обязательным, а часто даже нецелесообразно, поскольку условия, задающие область определения неравенства, обычно подключают к тому неравенству, которое является следствием заданного логарифмического неравенства.

Неравенства, решаемые с использованием определения логарифма

Неравенства вида $\log_a f(x) > b$ решаются следующим образом:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{matrix}\right. .$$

Аналогично решаются неравенства вида $\log_a f(x) < b$:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример. Решите неравенство: $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 0$.

Решение. Решение исходного неравенства лучше всего записать с использованием цепочек эквивалентных неравенств:

$$\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 0 \Leftrightarrow \log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le \log_2 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 1 \Leftrightarrow \log_3 1 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le \log_3 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \le x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{8} \le x < \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left[1\frac{1}{8}; 1\frac{1}{2}\right)$.

Неравенства, решаемые с использованием свойств логарифмов

Решение неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ основано на том, что функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \ne 1$, $x > 0$) является убывающей при $0 < a < 1$ и возрастающей при $a > 1$.

Таким образом, имеем следующие утверждения:

а) $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases};$

б) $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}.$

Заметим, что в неравенствах (а) и (б) можно использовать как первую (более полную) систему неравенств, так и вторую (укороченную) систему неравенств, ей равносильную. Достоинством более полной системы неравенств является ее наглядность и очевидность, а достоинством укороченной — меньшая трудоемкость, т. к. приходится решать на одно неравенство меньше. Однако переход от более полной системы к укороченной не всегда очевиден для малоопытного решающего.

Пример. Решите неравенство: $\log_{0,2}(x^2) > \log_{0,2}(3x)$.

Решение. Учитывая, что основание логарифмов $0 < 0,2 < 1$, получаем:

$$\log_{0,2}\left(x^2\right) > \log_{0,2}(3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x > 0 \\ x^2 < 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Ответ: $x \in (0; 3)$.

Логарифмические неравенства, решаемые с использованием замены переменной

Пример. Решите неравенство: $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \le 0.$

Решение. Обозначив $\log_3 x = t$, приходим к неравенству:

$t^2 - 2t - 3 \le 0,\ -1 \le t \le 3 \Leftrightarrow -1 \le \log_3 x \le 3 \Leftrightarrow \log_3 3^{-1} \le \log_3 x \le \log_3 3^3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le x \le 27.$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{3}; 27\right].$

Логарифмические неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма и в основании логарифма

В общем виде решение подобных неравенств можно записать следующим образом:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > (\varphi(x))^A > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ 0 < f(x) < (\varphi(x))^A \end{cases} \end{array}\right. .$$

На практике обычно рассматривают два случая (когда основание логарифма $\varphi(x) > 1$ и $0 < \varphi(x) < 1$) и не всегда пользуются приведенными выше эквивалентностями.

Пример. Решите неравенство: $\log_x(x - 2) \le 2$.

Решение.

Находим ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Отсюда основание логарифма больше 1, и мы приходим к цепочке неравенств, равносильных исходному:

$\log_x(x-2) \le 2 \Leftrightarrow \log_x(x-2) \le \log_x x^2 \Leftrightarrow$

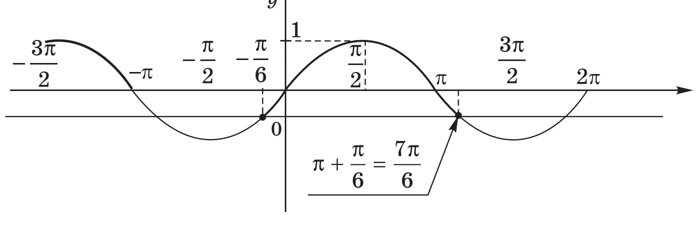
$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \le x^2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 \ge 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

2.6.4. Использование графиков при решении неравенства

Функция $\sin x$ имеет наименьший положительный период 2π. Поэтому неравенства вида $\sin x > 0$, $\sin x \ge a$, $\sin x < 0$, $\sin x \le a$ достаточно решить на каком-либо отрезке длины 2π. Множество всех решений получим, прибавив к каждому из найденных на этом отрезке решений числа вида $2\pi n$, $n \in Z$.

Решим неравенство: $\sin x > -\dfrac{1}{2}$.



Рассмотрим это неравенство на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

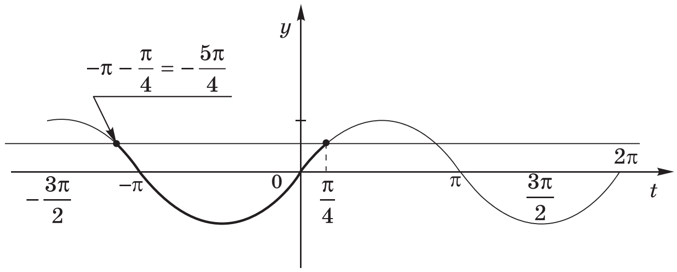
Уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет на этом промежутке два корня: $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

Поскольку $\sin x > -\frac{1}{2}$, то решением неравенства будут значения $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Решим более сложное неравенство: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$.

$\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Пусть $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = t$, тогда рассмотрим график $y = \sin t$.



Решением неравенства $\sin t \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ будут значения:

$2\pi n - \frac{5\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

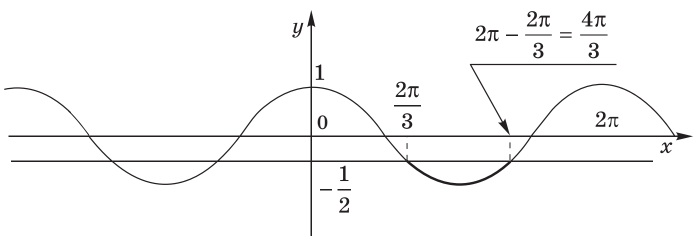
Тогда $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$;

$-\frac{6\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{x}{3} \le 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$; $-\frac{9\pi}{2} + 6\pi n < x < 6\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Ответ: $-\frac{9\pi}{2} + 6\pi n < x < 6\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Для неравенств вида $\cos x > a$ и $\cos x \le a$ удобно сначала найти решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

Например, решим неравенство: $\cos x \le -\frac{1}{2}$.

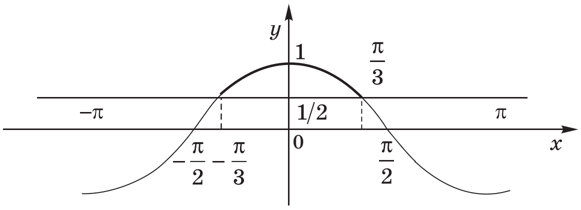


Очевидно, что решением этого неравенства будут значения: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Неравенства вида $\cos x > a$ и $\cos x \ge a$ удобно рассматривать на отрезке $[-\pi; \pi]$.

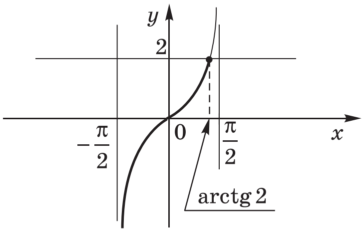
Решим неравенство $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geq 1$. Пусть $2x-\frac{\pi}{3}=t$, тогда $\cos t\geq\frac{1}{2}$. Рассмотрим график $y=\cos t$.



$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq t\leq\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$$
$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$$
$$2\pi n\leq 2x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\quad \pi n\leq x\leq\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Неравенства $\operatorname{tg}x>a$, $\operatorname{tg}x\geq a$; $\operatorname{tg}x<a$, $\operatorname{tg}x\leq a$ удобно решать на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а неравенства $\operatorname{ctg}x>a$, $\operatorname{ctg}x\geq a$; $\operatorname{ctg}x<a$, $\operatorname{ctg}x\leq a$ — на интервале $(0;\pi)$. Функции $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ имеют период π, поэтому, прибавляя к найденным на соответствующих интервалах решениям числа вида πn, $n\in Z$, получим все решения этих неравенств. Решим неравенство $\operatorname{tg}x\leq 2$.

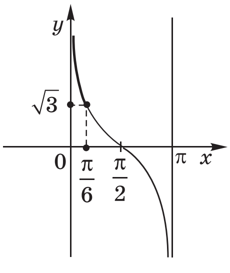


На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg}x$ монотонно возрастает, и уравнение $\operatorname{tg}x=2$ имеет одно решение: $x=\operatorname{arctg}2$.

Поэтому решением неравенства будут значения: $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\leq\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z$.

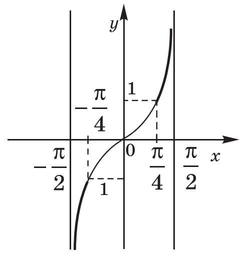
Ответ: $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\leq\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z$.

Решим неравенство: $\operatorname{ctg}x\geq\sqrt{3}$. На промежутке $(0;\pi)$ функция $\operatorname{ctg}x$ монотонно убывает, и уравнение $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$ имеет одно решение: $x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$.



Ответ: $\pi n<x\leq\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

Решим более сложное неравенство: $|\operatorname{tg} x| > 1$.



$|\operatorname{tg} x| > 1$, значит $\operatorname{tg} x > 1$ или $\operatorname{tg} x < -1$.

Тогда

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z} \text{ или } -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n, k \in \mathrm{Z}$.

2.6.5. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используется определение модуля функции:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x),\ f(x) \geq 0, \\ -f(x),\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Можно также воспользоваться свойствами модуля, в частности, такими, как:

$$|f(x)| \geq 0;\quad |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|;$$

$$|f(x)|^2 = (f(x))^2;\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|};\ |-f(x)| = |f(x)|;$$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2$$

(аналогичные свойства для неравенств имеют место, если в последней равносильности знак $<$, $\leq$, $\geq$).

Иногда используется геометрическая интерпретация модуля, согласно которой $|x - a|$ есть расстояние на числовой прямой между точками x и a.

Неравенство вида $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$, если $a > 0$, если $a \leq 0$, то неравенство $|f(x)| > a$ решений не имеет.

Неравенство вида $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a, \end{array}\right.$ если $a > 0$; если $a < 0$, то решением неравенства $|f(x)| > a$ является множество допустимых значений функции $f(x)$; если $a = 0$, то решением неравенства $|f(x)| > a$ является множество тех x, для которых $f(x) \neq 0$.

При решении неравенств, содержащих более одного модуля, применяют метод интервалов для модулей.

П р и м е р 1. Решите неравенство: $|x+2| \le 5$.

Решение.

1 способ. Поскольку $|f(x)| \le a \Leftrightarrow -a \le f(x) \le a$ при $a \ge 0$, то получаем $|x+2| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x+2 \le 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -5-2 \le x \le 5-2 \Leftrightarrow -7 \le x \le 3 \Leftrightarrow x \in [-7;\ 3]$.

2 способ. Возведя обе части исходного неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство $(x+2)^2 \le 5^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 5^2 \le 0 \Leftrightarrow (x+2-5)(x+2+5) \le 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+7) \le 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -7 \le x \le 3$ (последнюю равносильность можно получить, используя, например, метод интервалов).

3 способ. Используем определение модуля:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, x+2 \ge 0, \\ -(x+2),\ x+2 < 0. \end{cases}$$

Отсюда исходное неравенство можно заменить совокупностью двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ x+2 \le 5; \end{cases} \begin{cases} x+2 < 0, \\ -(x+2) \le 5. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $-2 \le \text{x} \le 3$, из второй системы $-7 \le x \le -2$. Отсюда искомое решение является объединением решений 1-й и 2-й систем, т. е. $x \in [-2\text{:}\ 3] \cup [-7;\ 2) = [-7;\ 3]$.

Ответ: $x \in [-7;\ 3]$.

П р и м е р 2. Решите неравенство: $|3x-2| > -2$.

Решение. Поскольку $|3x-2| \ge 0$, то исходное неравенство верно для любого действительного x, т. е. $x \in (-\infty;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;+\infty)$.

П р и м е р 3. Решите неравенство: $|3x-2| > 7$.

Решение. *1 способ*. Поскольку при $a > 0$

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a, \end{array}\right.$$ то имеем:

$$|3x-2| > 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-2 > 7, \\ 3x-2 < -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < -\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (3;+\infty).$$

2 способ. Исходное неравенство можно заменить двумя системами (точнее, совокупностью двух систем неравенств):

а) $\begin{cases} 3x-2 \ge 0, \\ 3x-2 > 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2 < 0 \\ -(3x-2) > 7 \end{cases}$

Решая систему (а), найдем $x > 3$. Решая систему (б), найдем $x < -\dfrac{5}{3}$. Решением исходного неравенства является объединение решений систем (а) и (б), т. е. $x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; 1\dfrac{2}{3}\right) \cup (3;+\infty)$.

П р и м е р 4. Решите неравенство: $|3x+61| < -1$.

Решение. Поскольку $|3x+61| \ge 0$, исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

П р и м е р 5. Решите неравенство: $|2x-4| < x-1$.

Решение. *1 способ*. Исходное неравенство можно заменить совокупностью двух систем:

$$\begin{cases} 2x-4 \ge 0, \\ 2x-4 < x-1; \end{cases} \begin{cases} 2x-4 < 0, \\ -(2x-4) < x-1. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $2 \le x < 3$, из второй системы — $\frac{5}{3} < x < 2$. Искомое решение является объединением решений первой и второй систем, т. е.

$$x \in [2; 3) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{3}; 3\right).$$

2 способ. $|2x - 4| < x - 1 \Leftrightarrow -(x - 1) < 2x - 4 < x - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x + 1 < 2x - 4 < x - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 > -x + 1, \\ 2x - 4 < x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 5, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(1\frac{2}{3}; 3\right)$.

Пример 6. Решите неравенство: $x^2 > |5x + 6|$.

Решение. Поскольку $|5x + 6| = \begin{cases} 5x + 6, \ x \ge -\frac{6}{5}, \\ -5x - 6, \ x < -\frac{6}{5}, \end{cases}$ то исходное неравенство можно заменить совокупностью двух систем неравенств:

а) $\begin{cases} x \ge -\frac{6}{5}, \\ x^2 > 5x + 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -\frac{6}{5}, \\ x^2 > -5x - 6. \end{cases}$

Решим эти системы неравенств (а) и (б):

а) $\begin{cases} x \ge -\frac{6}{5}, \\ x^2 > 5x + 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{6}{5}, \\ x < -1; \ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \le x < -1; \ x > 6.$

б) $\begin{cases} x < -\frac{6}{5}, \\ x^2 + 5x + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{6}{5}, \\ x < -3; \ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3; -2 < x < -\frac{6}{5}.$

Объединяя решения, полученные для систем (а) и (б), получаем окончательный ответ.

Ответ: $x \in [-\frac{6}{5}; -1) \cup (6; +\infty) \cup (-\infty; -3) \cup \left(-2; -\frac{6}{5}\right) = (-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (6; +\infty)$.

Пример 7. Решите неравенство: $|x + 2| + |x - 2| < 6$.

Решение. При решении исходного неравенства используем метод интервалов для модулей. Отметим на числовой прямой точки, в которых выражения, находящиеся под знаками модулей, обращаются в нуль. Это точки $x = -2$, $x = 2$. Вся числовая прямая разбивается этими точками на три интервала (три промежутка): $(-\infty; 2)$ (1-й интервал), $[-2; 2]$ (2-й интервал), $(2; \infty)$ (3-й интервал). Приведем четыре формы записи решения исходного неравенства.

1 форма записи решения. На 1 интервале $(-\infty; 2)$ по определению модуля имеем $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$; $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$. Значит, на 1-м интервале исходное неравенство равносильно такому:

$-x - 2 \ -x + 2 < 6 \Leftrightarrow -2x < 6 \Leftrightarrow x > -3.$

Так как рассматривается интервал $x \in (-\infty; 2)$, то в множество решений входит пересечение множеств: $(-\infty; -2) \cap (-3; \infty) = (-3; 2)$ — решение исходного неравенства на 1-м интервале.

На отрезке $[-2; 2]$ (2-м интервал):

$|x + 2| = x + 2$; $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$

мы имеем $x + 2 \ -x + 2 < 6 \Leftrightarrow 4 < 6$, т. е. верное числовое неравенство. Поэтому все значения переменной, принадлежащие этому отрезку, входят в множество решений, т. е. $x \in [-2; 2]$ — решение на 2-м интервале.

На 3-м интервале $x \in (2; \infty)$ $|x+2| = x+2$; $|x-2| = x-2$, и мы получаем $x+2+x-2<6 \Leftrightarrow 2x<6$ $\Leftrightarrow \Leftrightarrow x<3$. Поскольку рассматривается интервал $x \in (2; \infty)$, то в множество решений входит пересечение множеств $(2; \infty) \cap (-\infty; 3) = (2; 3)$ — решение на 3-м интервале.

Объединяя полученные результаты, делаем вывод: исходное равенство выполняется при $x \in (-3; 2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3)$. Таким образом, $x \in (-3; 3)$ — решение исходного неравенства.

Ответ: $x \in (-3; 3)$.

2 форма записи решения. Рассматривая исходное неравенство на каждом из трех промежутков, получаем совокупность трех систем. Таким образом,

$|x+2| + |x-2| < 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ -(x+2)-(x-2)<6; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x+2-(x-2)<6; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x+2+x-2<6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ x>-3; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ 4<6; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x<3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<x-2, \\ -2 \le x \le 2, \\ 2<x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (-3; 2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3)$.

3 форма записи решения. На каждом из трех интервалов рассмотрим решение исходного равенства.

1-м интервал. $(x>-2)$: $|x+2| = -(x+2)$; $|x-2| = -(x-2)$. Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x<-2, \\ -(x+2)-(x-2)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<-2.$$

2-й интервал. $(-2 \le x \le 2)$: $|x+2| = x+2$; $|x-2| = -(x-2)$. Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x+2-(x-2)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ 4<6 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 2.$$

3-й интервал. $(x>2)$: $|x+2| = x+2$; $|x-2| = x-2$. Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x>-2, \\ x+2+x-2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<3.$$

Решение исходного неравенства получаем путем объединения решений, полученных на 1-м, 2-м и 3-м интервалах:

$x \in (-3; 2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3)$.

4 форма записи решения. Рассмотрим три случая:

1) $\begin{cases} x<-2, \\ -(x+2)-(x-2)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3;-2);$

2) $\begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x+2-(x-2)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ 4<6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;2];$

3) $\begin{cases} x>-2, \\ x+2+x-2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;3).$

Объединяя найденные множества значений x, получаем: $x \in (-3; 2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3)$.

Ответ: $-3<x<3$.

Пример 8. Решите неравенство: $|x-2|^3 + |x-2| > 2$

Решение. Выполнив замену переменной $|x-2| = t$, $t \ge 0$, получаем:

$$\begin{cases} t^3+t>2, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3+t-2>0, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t^2+t+2)>0, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1>0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>1, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t>1.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной, получаем, что исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$|x-2|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>1, \\ x-2<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(3;\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$.

2.6.6. Неравенства с параметром

Пример. Решите неравенство:

$(a-1)x > a^2 - 1$.

Решение.

Рассмотрим случаи:

а) $a > 1$; б) $a < 1$; в) $a = 1$.

а) При $a > 1$ делим обе части на $a - 1$ и получаем: $x > a + 1$.

б) При $a < 1$ одновременно с делением на $a - 1$ изменяем знак неравенства: $x < a + 1$.

в) При $a = 1$ неравенство не выполняется ни при каком x.

Ответ: если $a > 1$, то $x \in (a + 1;\ +\infty)$;

если $a < 1$, то $x \in (-\infty;\ a + 1)$;

если $a = 1$, то решений нет.

2.6.7. Решение комбинированных неравенств

Тригонометрические неравенства, сводящиеся к квадратным

Если тригонометрические неравенства в результате тождественных преобразований сводятся к виду $a\sin^2 t + b\sin t + c \ge 0$ или $a\cos^2 t + b\cos t + c \ge 0$, то вводят подстановку: $y=\sin t$ $(y=\cos t)$, $|y| \le 1$. Получают неравенство вида: $ay^2+by+c\ge 0$.

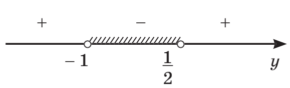
Решают алгебраическое неравенство, возвращаются к подстановке. Решают простейшее тригонометрическое неравенство, которое получили в результате подстановки.

Пример. Решите неравенство: $2\sin^2 x+\sin x-1<0$.

Решение. Пусть $\sin x = y$, $y \in [-1;\ 1]$, тогда $2y^2+y-1<0$.

$y_1=-1;\ y_2=\dfrac{1}{2};$

$-1<y<\dfrac{1}{2}.$



$$\begin{cases} \sin x>-1; \\ \sin x<\dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ne -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z; \\ -\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n<x<\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n;-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Метод интервалов для решения тригонометрических неравенств

Метод интервалов для решения тригонометрических неравенств $f(x) \geq 0$ может использоваться **по следующей схеме.**

1. Найти ОДЗ неравенства.
2. Найти период функции $f(x)$ (если он существует).
3. Найти нули функции $(f(x) = 0)$.
4. Обозначить нули на ОДЗ на одном периоде и найти знак функции на каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.
5. Записать ответ (учитывая знак заданного неравенства и период функции $f(x)$).

Пример. Решите неравенство: $\cos 2x \leq \cos 3x - \cos 4x$.

Решение. Используя метод интервалов, сведем функцию к виду $f(x) \leq 0$:

$\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x \leq 0$.

1. ОДЗ: x — любое действительное число.

2. Период функции $\cos x$ равен 2π, период функции $\cos 2x$ $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$, период функции $\cos 3x$ — $T_2 = \dfrac{2\pi}{3}$, а период $\cos 4x$ — $T_3 = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

На отрезке 2π периоды T_2, T_3 и T_1 помещаются целое число раз, значит, общий период $T = 2\pi$.

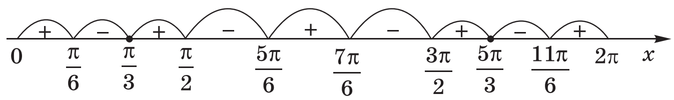
3. Найдем нули функции: $\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x = 0$.

$2\cos 3x \cos x - \cos 3x = 0$; $\cos 3x(2\cos x - 1) = 0$;

$\cos 3x = 0$ или $2\cos x - 1 = 0$;

$x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \mathrm{Z}$ или $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.

4. Обозначим все нули на периоде 2π, например, на отрезке от 0 до 2π, получим 9 промежутков:



Находим значение функции $f(x)$ на каждом промежутке. Для этого удобно записать функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \cos 3x(2\cos x - 1)$. Запишем ответ с учетом периода:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{5\pi}{3} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right],\ k \in \mathrm{Z}.$$

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.6. «Неравенства с одной переменной»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Решите неравенство $2x + 3 > 5$. В ответ запишите наименьшее целое решение данного неравенства.

B2

B2. Решите неравенство $2x + 1 > 0$. В ответ запишите наименьшее натуральное решение данного неравенства.

B3

B3. Решите неравенство $2 - 5x \geq 14 - x$. В ответ запишите наибольшее целое решение данного неравенства.

B4

B4. Решите неравенство $x - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{x-1}{4}$. В ответ запишите наименьшее целое решение данного неравенства.

B5

B5. Решите неравенство $\frac{x-21}{x+7} \leq 0$. В ответ запишите наименьшее целое решение данного неравенства.

B6

B6. Решите неравенство $(x^2 + 17)(x - 6)(x + 2) < 0$. В ответ запишите количество целых решений данного неравенства.

B7

B7. Решите неравенство $x + 1 < \frac{x}{2} < x + 2$. В ответ запишите количество целых решений данного неравенства.

B8

B8. Решите неравенство $2 - \frac{x}{3} < \frac{x-1}{4} < 1 + \frac{x}{6}$. В ответ запишите количество целых решений данного неравенства.

B9. Решите неравенство $6^{x^2+2x} < 6^3$. В ответ запишите количество целых решений данного неравенства.

B10. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \le -2$. В ответ запишите количество натуральных чисел, которые не являются решениями денного неравенства.

B11. Укажите наименьшее целое решение неравенства $\log_{0,5}(x^2 + x) \ge -1$.

B12. Укажите наименьшее целое решение неравенства $25^x + 25 \cdot 5^x - 1250 > 0$.

B13. Укажите наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$.

B14. Укажите наименьшее целое число, которое является решением неравенства $\dfrac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0$.

B15. Решите неравенство $\dfrac{5}{x} \ge 1$. В ответ запишите сумму целых решений данного неравенства.

B16. Найдите наибольшее целое решение неравенства $(x + 12)(x - 9)^2(x - 5)^3 \le 0$.

B17. Укажите число целых решений неравенства $\dfrac{(x-4)(x-1)}{(x-2)^2(x-7)} > 0$ на промежутке $[-20; -10]$.

B18. Укажите наименьшее целое значение параметра a, при котором неравенство $x^2 - (4a + 1)x + (a + 2)(3a - 1) > 0$ выполняется при всех отрицательных значениях x.

2.7. Системы неравенств

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача отыскать все те значения переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств.

Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как и равносильность систем уравнений, т. е. с помощью знака $\Leftrightarrow$.

Очевидно, что решением системы неравенств является пересечение решений неравенств, образующих систему, а решением совокупности неравенств является объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют систему неравенства, то их записывают в столбик с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

Так, например, запись $\begin{cases} 3x+5>2, \\ 4x-5 \le 15 \end{cases}$ означает, что неравенства $3x+5>2$ и $4x-5 \le 15$ образуют систему неравенств.

Двойное неравенство $g(x) < f(x) < \varphi(x)$ эквивалентно (равносильно) системе неравенств, т. е.

$$g(x) < f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}.$$

Например, $\begin{cases} x+1 \le -5, \\ x+1 \ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \le x+1 \le 5.$

П р и м е р . Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \ge 1, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \ge 1, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 \ge 0, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2} \ge 0, \\ x+1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (1-x)(1+x) \ge 0, \\ x \ne 0, \\ x > -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-1;\ 1], \\ x \ne 0, \\ x > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-1;\ 1], \\ x \ne 0; \end{cases} \quad x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1].$$

Ответ: $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

2.8. Совокупность неравенств

Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача отыскать все те значения переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из этих неравенств.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют *совокупность неравенств*, то их записывают либо в столбик с помощью *квадратной скобки*, либо в строку с помощью знака «;», например:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow f_1(x) > g_1(x);\ f_2(x) > g_2(x).$$

Несколько систем неравенств с одной переменной образуют совокупность систем неравенств, если ставится задача отыскать все те значения переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одной из этих систем.

П р и м е р. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-4}{\log_{0,5}(x^2-1)} < 0.$

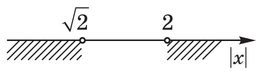
Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1>0, \\ \log_{0,5}(x^2-1) \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2>1, \\ x^2-1 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |x|>1, \\ x^2 \neq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} |x|>1, \\ x \neq \pm\sqrt{2}; \end{cases}$

$x \in (-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty).$

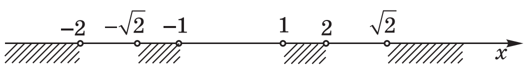
$$\frac{x^2-4}{\log_{0,5}(x^2-1)} < 0;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4>0, \\ \log_{0,5}(x^2-1)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4<0, \\ \log_{0,5}(x^2-1)>0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4>0, \\ x^2-1>1; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4<0, \\ x^2-1<1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2>4, \\ x^2>2; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2<4, \\ x^2<2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2>4, \\ x^2<2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x|>2, \\ |x|<\sqrt{2}; \end{array}\right.$$



$x \in (-\infty;-2) \cup (-\sqrt{2};\ \sqrt{2}) \cup (2;\ +\infty).$

Учитывая область определения, получаем:



$x \in (-\infty;\ -2) \cup (-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2}) \cup (2;\ +\infty).$

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup (-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2}) \cup (2;\ +\infty).$

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.7. «Системы неравенств»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Решите неравенство $\frac{x-2}{x+3} \le 0$. В ответ запишите наибольшее целое решение данного неравенства.

B2

B2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1)+16; \\ 4(2+x) < 3x+8. \end{cases}$ В ответ запишите наименьшее целое решение данного неравенства.

B3

B3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x-1 \ge -5; \\ x+1 \le 4. \end{cases}$ В ответ запишите наибольшее целое решение данного неравенства.

B4

B4. Решите неравенство $\frac{x-1}{x+3} < 0$. В ответ запишите количество целых решений данного неравенства.

B5

B5. Решите систему неравенств $\begin{cases} x(x-1)-(x^2-10) < 1-6x; \\ 3,5-(x-1,5) < 6-4x. \end{cases}$ В ответ запишите наибольшее целое решение.

B6

B6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x-2}{11}; \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}. \end{cases}$ В ответ запишите наибольшее целое решение данной системы.

B7

B7. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{x+2}{4} < \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{2}; \\ \frac{x-2}{3} > 1 + \frac{x-5}{15}. \end{cases}$ В ответ запишите наименьшее целое решение.

B8

B8. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+x-6 < 0; \\ -x^2+2x+3 > 0. \end{cases}$ В ответ запишите наибольшее целое решение данной системы.

B9. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0; \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$ В ответ запишите наименьшее решение данной системы.

B9

B10. Решите неравенство $|\lg x| \le 1$. В ответ запишите сумму наибольшего и наименьшего решений данного неравенства.

B10

B11. Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых решений системы:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{2} - \dfrac{3x+5}{3} - \dfrac{x}{6} < 3 - \dfrac{x+4}{2}; \\ 1 - \dfrac{2x-3}{3} + \dfrac{4-3x}{2} < 2x - \dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$$

B11

B12. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства $\log_{0,5}\left|2 - \dfrac{1}{x}\right| < 2.$

B12

B13. Найдите наименьшее целое решение неравенства $-4 \le 3^{x^2-2x-1} - 5 \le 4$.

B13

B14. Решите систему неравенств $\begin{cases} 1 < 2x - 1 < 9; \\ -1 \le 1 - x \le 4. \end{cases}$ В ответ запишите наибольшее целое решение данной системы неравенств.

B14

B15. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 \ge 9; \\ 0 < 2x + 9 < 17. \end{cases}$ В ответ запишите наименьшее целое решение данной системы неравенств.

B15

B16. Решите систему неравенств $\begin{cases} 1 - x^2 \ge 0; \\ \dfrac{x-1}{2-x} + \dfrac{1}{2} > 0. \end{cases}$ В ответ запишите количество натуральных решений данной системы.

B16

B17. Решите систему неравенств $\begin{cases} 0 < (x-2)^2 < 25; \\ \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x+1} \ge 0. \end{cases}$ В ответ запишите количество целых решений данной системы.

B17

B18. Укажите наибольшее целое значение параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases} 4x + a \ge 1; \\ 5x - a < 8 \end{cases}$ не имеет решений.

B18

Тренировочные тестовые задания к разделу 2 «Уравнения и неравенства»

Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

В1. Решите неравенство $\frac{x(x-2)}{x+4} \le 0$. Укажите в ответе наибольшее целое решение неравенства.

B2

В2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ и найдите $x_0 + y_0$, где пара $(x_0; y_0)$ — решение данной системы уравнений.

B3

В3. Сколько натуральных решений имеет неравенство $\log_3 (x-1) \le 0$?

B4

В4. Решите уравнение $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{5^x} = 1000$. (Если уравнение имеет более одного корня, то запишите их сумму.)

B5

В5. Найдите наибольшее целое решение уравнения $\log_2 x = \frac{4}{\log_2 x - 3}$.

B6

В6. Решите уравнение $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$. (Если уравнение имеет более одного корня, то запишите их сумму.)

B7

В7. При каком наименьшем целом значении параметра a система $\begin{cases} |x| + |y| = 7, \\ x^2 + (y-a)^2 = 49 \end{cases}$ имеет единственное решение?

B8

В8. Решите уравнение $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x} = 0$. Сколько решений имеет это уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$?

B9. Решите неравенство $(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 \le 0$ и найдите сумму целых решений.

B9

B10. Найдите отрицательный корень уравнения $|x| + |x-3| = 11$.

B10

B11. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$.

B11

B12. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=9, \\ x-y=3 \end{cases}$ и найдите $x_0 + 2y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений.

B12

Часть 2

При выполнении заданий C1–C6 требуется привести полное обоснованное решение и ответ.

C1. Найдите наименьшее натуральное число, которое является решением неравенства $(3^x - 9)(x^2 - 2x - 8) > 0$.

C2. Решите уравнение $(1 - \sin x)\,\mathrm{tg}\, x = 0$.

C3. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $(x-a)\log_2(3x-7) = 0$ имеет только один корень.

C4. Решите уравнение $\sin^2 x + a \sin^2 2x = 0{,}5$.

C5. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$.

C6. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x}{4}+2} = \sqrt{\frac{x}{4}-3} + a$.

Раздел 3
Функции

3.1. Числовые функции и их свойства

Понятие функции

Пусть $D(f)$ и $E(f)$ — произвольные числовые множества. Говорят, что на множестве $D(f)$ определена числовая функция $y = f(x)$, если каждому числу $x \in D(f)$ поставлено в соответствие **единственное**, вполне определенное число: $y = f(x) \in E(f)$. Множество $D(f)$ называется **областью определения** функции, или областью допустимых значений независимой переменной (сокращенно ОДЗ), а $E(f)$ — **областью значений** функции ($E(f)$ также называют областью изменения, множеством значений), $E(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D(f)\}$.

Нередко область определения и область значений функции $y = f(x)$ обозначают так: $D(y)$ — область определения, $E(y)$ — область значений.

Произвольный элемент x области определения $D(f)$ называется **независимой переменной,** или **аргументом,** а величина $y = f(x)$ — **зависимой переменной,** или **функцией.**

Коротко можно сказать: зависимость переменной y от переменной x называется **функцией,** если каждому значению x соответствует единственное значение y.

Тот факт, что задана функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ с областью определения $D(f)$ и областью значений $E(f)$, иногда записывают в следующей форме:

$$f\colon D(f) \to E(f), \text{ или } D(f) \xrightarrow{\ f\ } E(f), \text{ или } D \xrightarrow{\ f\ } E.$$

Основные способы задания функции

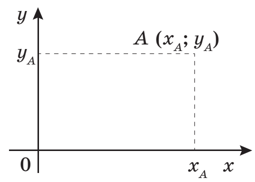
Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно было бы найти соответствующее значение функции. Существует четыре основных способа задания функции: **1) аналитический; 2) графический; 3) табличный; 4) словесного описания.**

1. Аналитический способ задания функции. При аналитическом способе функция задается с помощью формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ — некоторое выражение с переменной x.

Например: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \begin{cases} 2x^5, x \le 0 \\ \sqrt{x+1}, x > 0 \end{cases}$.

2. При **графическом способе задания** изображают график функции $y = (x)$ в системе координат xOy.

Графиком функции называется изображение на координатной плоскости множества упорядоченных пар $\{(x;\ y) \mid y = (x),\ x \in D(f)\}$. Каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x;\ y)$



можно поставить в соответствие точку на плоскости. Для этого на плоскости изображают прямоугольную (декартову) систему координат xOy. Прямые Ox и Oy взаимно перпендикулярны, O — точка пересечения этих прямых. Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, O — начало координат. На каждой из осей Ox и Oy выбирают положительное направление отсчета (на оси Ox — слева направо, на оси Oy — снизу вверх). Выбирают также единицу измерения (масштаб). Каждая точка $A\ (x_A;\ y_A)$ на координатной плоскости имеет две координаты: x_A — абсциссу, y_A — ординату. Записывается это так: $A\ (x_A;\ y_A)$.

Таким образом, графиком функции $y = (x)$ является множество точек координатной плоскости xOy, абсциссы которых являются значениями аргумента x, а ординаты — соответствующими значениями функции y. Для того чтобы множество точек координатной плоскости являлось графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси Oy, пересекалась с этим графиком не более, чем в одной точке.

Графический способ удобен тогда, когда задать функцию аналитически довольно трудно.

3. Табличный способ задания функции заключается в том, что соответствие между элементами множеств $D(f)$ и $E(f)$ задается в форме таблицы.

При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n$ для имеющихся в таблице значений аргумента $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$.

x	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

Примерами табличного способа задания функции являются, например, таблицы квадратов, квадратных корней, кубов, логарифмов и др.

4. При **словесном способе задания функции** закон, согласно которому значения функции соответствуют значениям аргумента, формулируется словесно. Так, например, размер подоходного налога является функцией заработной платы налогоплательщика.

3.1.1. Область определения функции

Областью определения функции, которая задана формулой $y = f(x)$, называется множество значений x, при которых формула имеет смысл (все действия, указанные формулой, выполнимы).

Например, областью определения функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ есть множество всех действительных чисел, кроме $x = 1$.

Область определения тригонометрической функции

Областью определения функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ есть множество всех действительных чисел: $x \in \mathrm{R}$.

Областью определения функции $y = \mathrm{tg}\ x$ есть множество всех действительных чисел, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Областью определения функции $y = \mathrm{ctg}\ x$ есть множество всех действительных чисел, кроме $x = \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Областью определения функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ есть числовой промежуток $[-1; 1]$, т. е. $x \in [-1; 1]$.

Областью определения функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ есть множество всех действительных чисел, т. е. $x \in R$.

Пример 1. Найдите область определения функции: $y = \dfrac{1}{\sin x + 1}$.

Решение. $\sin x + 1 \neq 0$, тогда $\sin x \neq -1$, т. е. $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Найдите область определения функции: $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение.

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \pi n,\ n \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z; \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi m}{2},\ m \in Z.$$

Ответ: $x \neq \dfrac{\pi m}{2},\ m \in Z$.

Область определения показательной функции

Областью определения функции $y = a^x$ есть множество всех действительных чисел.

Пример 1. Найдите область определения функции: $y = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$.

Решение. $2^x - 1 \neq 0$, тогда $2^x \neq 1$, $x \neq 0$.
Ответ: $x \neq 0$.

Пример 2. Найдите область определения функции: $y = \dfrac{1}{e^x - 1} + \dfrac{1}{e^{-x} - 1}$.

Решение. $\begin{cases} e^x - 1 \neq 0, \\ e^{-x} - 1 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} e^x \neq 1, \\ e^{-x} \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x \neq 0.$

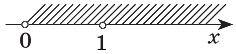
Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Область определения логарифмической функции

Областью определения функции $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, есть множество положительных действительных чисел, т. е. $x \in (0; +\infty)$.

Пример 1. Найдите область определения функции: $y = \ln x + \dfrac{1}{\ln x}$.

Решение. $\begin{cases} x > 0, \\ \ln x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

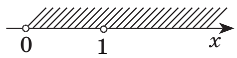


$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. Найдите область определения: $y = \dfrac{\log_3 x}{\lg x}$.

Решение. $\begin{cases} x > 0, \\ \lg x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$



$x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Ответ: $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Область определения корня четной степени

Областью определения функции $y = \sqrt[2n+1]{x}$, где $n \in \mathrm{N}$, есть множество всех действительных чисел, т. е. $x \in \mathrm{R}$.

Областью определения функции $y = \sqrt[2n]{x}$, где $n \in \mathrm{N}$, есть множество всех неотрицательных действительных чисел, т. е. $x \in [0;\ +\infty)$.

Пример 1. Найдите область определения функции: $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. $\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt[3]{x} \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $x > 0$.

Ответ: $(0;\ +\infty)$.

Пример 2. Найдите область определения функции: $y = \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{-x}$.

Решение. $\begin{cases} x \geq 0, \\ -x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 0; \end{cases}$ $x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

Пример 3. Найдите область определения функции: $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} + \sqrt{x}$.

Решение. $\begin{cases} -x > 0, \\ x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$ Функция не существует.

Ответ: функция не существует (не определена).

3.1.2. Множество значений функции

Множеством значений (областью значений) функции называется множество чисел, состоящее из всех значений функции. Чтобы найти область значений функции $y = f(x)$, необходимо найти все значения a, при которых $f(x) = a$ имеет единственное решение.

Множество значений тригонометрической функции

Множеством значений функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ является числовой промежуток $[-1;\ 1]$, т. е. $y \in [-1;\ 1]$.

Множеством значений функций $y = \mathrm{tg}\ x$, $y = \mathrm{ctg}\ x$ является множество всех действительных чисел, т. е. $y \in \mathrm{R}$.

Множеством значений функции $y = \arcsin x$ является числовой промежуток $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, т. е. $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Множеством значений функции $y = \arccos x$ является числовой промежуток $[0;\ \pi]$, т. е. $y \in [0;\ \pi]$.

Множеством значений функции $y = \mathrm{arctg}\ x$ является числовой промежуток $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, т. е. $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Множеством значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является числовой промежуток $(0; \pi)$, т. е. $y \in (0; \pi)$.

П р и м е р. Найдите множество значений функции:

а) $y = 5 \sin x + 1$; б) $y = 3 - \cos^2 x$; в) $y = \dfrac{1}{2 + \cos x}$.

Решение. а) $-1 \le \sin x \le 1$; $-5 \le 5 \sin x \le 5$; $-5 + 1 \le 5 \sin x + 1 \le 5 + 1$; или $-4 \le y \le 6$;
б) $-1 \le \cos x \le 1$; $0 \le \cos^2 x \le 1$; $0 \ge -\cos^2 x \ge -1$;
или $-1 \le -\cos^2 x \le 0$; $3 - 1 \le 3 - \cos^2 x \le 3 + 0$;
или $2 \le 3 - \cos^2 x \le 3$; $2 \le y \le 3$;
в) $-1 \le \cos x \le 1$; $2 - 1 \le 2 + \cos x \le 2 + 1$; $1 \le 2 + \cos x \le 3$;

тогда $\dfrac{1}{1} \ge \dfrac{1}{2 + \cos x} \ge \dfrac{1}{3}$ или $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2 + \cos x} \le 1$, т. е. $\dfrac{1}{3} \le y \le 1$.

Ответ: а) $[-4; 6]$; б) $[2; 3]$; в) $\left[\dfrac{1}{3}; 1\right]$.

Множество значений показательной функции

Множеством значений показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \ne 1$, является промежуток $(0; +\infty)$.

П р и м е р. Найдите область значений функции: $y = 3^{x+1} - 2$.

Решение. Поскольку областью значений функции $y = 3^x$ является промежуток $(0; +\infty)$, тогда областью значений функции $y = 3 \cdot 3^x$ также является промежуток $(0; +\infty)$, а функция $y = 3^{x+1} - 2$ имеет областью значений промежуток $(-2; +\infty)$.

Ответ: $(-2; +\infty)$.

Множество значений логарифмической функции

Множеством значений логарифмической функции $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \ne 1$, является множество действительных чисел.

П р и м е р. Найдите область значений функции: а) $y = \log_{\sqrt{2}} x$; б) $y = -\log_{\sqrt{2}} x - 1$.

Решение.

а) Областью значений функции $y = \log_{\sqrt{2}} x$ является множество $(-\infty; +\infty)$.

б) Поскольку областью значений функции $y = \log_{\sqrt{2}} x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$, то областью значений функции $y = -\log_{\sqrt{2}} x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$, а областью значений функции $y = -\log_{\sqrt{2}} x - 1$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$.

Множество значений рациональной функции

П р и м е р 1. Найдите область значений функции: $y = x^2 - 4$.

Решение. Составляем уравнение $x^2 - 4 = a$. Оно равносильно уравнению $x^2 = a + 4$, которое имеет решение, если $a + 4 \ge 0$, т. е. при $a \ge -4$. Все эти числа и составляют область значений функции.

Следовательно, областью значений данной функции является промежуток $[-4; +\infty)$.

Ответ: $[-4; +\infty)$.

П р и м е р 2. Найдите область значений функции: $y = \dfrac{x + 3}{x - 3}$.

Решение. Составим уравнение $\dfrac{x + 3}{x - 3} = a$. Оно равносильно уравнению $x + 3 = a(x - 3)$ при $x \ne 3$ или $x - ax = -3 - 3a$, или $x(1 - a) = -3(1 + a)$, которое имеет решение $x = \dfrac{-3(1 + a)}{1 - a}$, если $a \ne 1$.

Следовательно, областью значений данной функции является множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Следует отметить, что областью значений функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad \neq bc)$ является множество $\left(-\infty; \dfrac{a}{c}\right) \cup \left(\dfrac{a}{c}; +\infty\right)$.

Множество значений корня

Множеством значений функции $y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathrm{N}$ является множество неотрицательных действительных чисел.

Множеством значений функции $y = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathrm{N}$ является множество действительных чисел.

П р и м е р. Найдите область значений функций:

а) $y = \sqrt{x^2+4}$; б) $y = \sqrt{x-2} + 2$.

Решение.

а) Поскольку $0 \le x^2 \le +\infty$, то $4 \le x^2 + 4 \le +\infty$, тогда $2 \le \sqrt{x^2+4} \le +\infty$. Следовательно, областью значений функции $y = \sqrt{x^2+4}$ является множество $[2; +\infty)$.

б) Поскольку $0 \le x - 2 \le +\infty$. то $0 \le \sqrt{x-2} \le +\infty$, тогда $0 + 2 \le \sqrt{x-2} \le +\infty$, т. е. $2 \le y \le +\infty$.
Следовательно, областью значений данной функции является промежуток $[2; +\infty)$.

Ответ: а) $[2; +\infty)$; б) $[2; +\infty)$.

Множество значений степенной функции

П р и м е р 1. Найдите область значений функции:

а) $y = x^2 - 4x + 5$; б) $y = (x-4)^6 - 4$.

Решение.

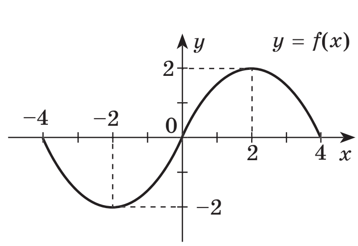
а) $y = x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x-2)^2 + 1$.
Поскольку функция $y = (x-2)^2$ имеет множество значений $[0; +\infty)$, то функция $y = (x-2)^2 + 1$ имеет множество значений $[1; +\infty)$.

б) Поскольку функция $y = (x-4)^6$ имеет множество значений $[0; +\infty)$, то функция $y = (x-4)^5 - 4$ имеет множество значений $[-4; +\infty)$.

Ответ: а) $[1; +\infty)$; б) $[-4; +\infty)$.

3.1.3. Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ непрерывна тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке $x = a$, т. е. существует $f(a)$;
2) существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
3) предел функции в точке a равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, таких, что $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Иными словами, при незначительном изменении аргумента значение функции также изменяется незначительно.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то ее называют непрерывной на данном промежутке. Справедлива теорема:

Если $f(x)$ и $g(x)$ являются непрерывными в точке $x = a$, то в этой точке непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Исходя из этого, можно утверждать:

а) многочлен $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ — непрерывная функция в любой точке;

б) дробно-рациональная функция $y = \dfrac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$ непрерывна в любой точке числовой оси, кроме тех точек, в которых знаменатель равен нулю;

в) функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = |x|$ непрерывны во всех точках области определения.

Пример. Исследуйте на непрерывность функцию: $y = \dfrac{\cos x}{x^2 - 1}$.

Решение. Данная функция существует всюду, кроме $x = \pm 1$. Функции $y = \cos x$, $y = x^2 - 1$ непрерывны в каждой точке числовой прямой, и функция $y = x^2 - 1$ всюду отлична от нуля, кроме $x = \pm 1$. Поэтому по теореме о непрерывности частного данная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой, кроме точек $x = \pm 1$, следовательно, она непрерывна на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: функция непрерывна, если $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

3.1.4. Периодичность функции

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $(x - T)$ и $(x + T)$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$. Число T в этом случае называется периодом функции $f(x)$.

Всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов, так как если T — период функции $y = f(x)$, то и число вида kT — период функции ($k \in \mathrm{Z}\backslash\{0\}$). На практике, говоря о периоде, нередко имеют в виду наименьший положительный период (если таковой существует).

Периодичность синуса

Период функции $y = \sin x$ равен 2π, а период функции $y = A \sin(kx + b)$, где $k \neq 0$, равен $T = \dfrac{2\pi}{|k|}$.

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\sin 390°$; б) $\sin\frac{9\pi}{4}$.

Решение.

а) $\sin 390° = \sin(360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$;

б) $\sin\frac{9\pi}{4} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

П р и м е р 2. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\right) + 3$; б) $y = \sin(3x - 1) - 1$.

Решение.

а) $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$;

б) $T = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) 4π; б) $\frac{2\pi}{3}$.

Периодичность косинуса

Период функции $y = \cos x$ равен 2π, а период функции $y = A\cos(kx + b)$, где $k \neq 0$, равен $T = \frac{2\pi}{|k|}$.

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\cos 405°$; б) $\cos\frac{13\pi}{6}$.

Решение.

а) $\cos 405° = \cos(360° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

П р и м е р 2. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \cos\frac{x}{3}$; б) $y = 3\cos 2x$.

Решение.

а) $T = 2\pi : \frac{1}{3} = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$;

б) $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ответ: а) 6π; б) π.

Периодичность тангенса

Период функции $y = \text{tg}\ x$ равен π, а период функции $y = A\ \text{tg}\ (kx + b)$, $k \neq 0$ равен $T = \dfrac{\pi}{|k|}$.

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\text{tg}\ 405°$; б) $\text{tg}\dfrac{4\pi}{3}$.

Решение.

а) $\text{tg}\ 405° = \text{tg}\ (360° + 45°) = \text{tg}\ 45° = 1$;

б) $\text{tg}\dfrac{4\pi}{3} = \text{tg}\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Ответ: а) 1; б) $\sqrt{3}$.

П р и м е р 2. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \text{tg}\dfrac{x}{\pi}$; б) $y = \text{tg}\ 8x$.

Решение.

а) $T = \pi : \dfrac{1}{\pi} = \pi \cdot \pi = \pi^2$;

б) $T = \pi : 8 = \dfrac{\pi}{8}$.

Ответ: а) π^2; б) $\dfrac{\pi}{8}$.

Периодичность котангенса

Период функции $y = \text{ctg}\ x$ равен π, а период функции $y = A\ \text{ctg}\ (kx + b)$, где $k \neq 0$, равен $T = \dfrac{\pi}{|k|}$.

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\text{ctg}\ 405°$; б) $\text{ctg}\dfrac{4\pi}{3}$.

Решение.

а) $\text{ctg}\ 405° = \text{ctg}\ (360° + 45°) = \text{ctg}\ 45° = 1$;

б) $\text{ctg}\dfrac{4\pi}{3} = \text{ctg}\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{ctg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: а) 1; б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

П р и м е р 2. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \text{ctg}\ \pi x$; б) $y = \text{ctg}\dfrac{x}{6}$.

Решение.

а) $T = \dfrac{\pi}{\pi} = 1$;

б) $T = \pi : \dfrac{1}{6} = 6\pi$.

Ответ: а) 1; б) 6π.

3.1.5. Четность (нечетность) функции

Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $(-x)$ оказалось, что $f(-x) \neq -f(x)$, и хотя бы для одной пары значений x и $(-x)$ оказалось, что $f(-x) \neq f(x)$, то функция называется **функцией общего вида**.

Из определения четных и нечетных функций следует, что область определения $D(f)$ как четной, так и нечетной функции симметрична относительно начала координат, т. е. если $x \in D(f) \Rightarrow$ $\Rightarrow (-x) \in D(f)$.

Если функция $y = f(x)$ является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат. Если функция $y = f(x)$ является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.

Пример. Исследуйте функции на четность (нечетность):

а) $y = \sin x + x$;

б) $y = x^2 \cos x$;

в) $y = \operatorname{tg} x + x^2$.

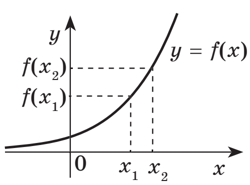
Решение.

а) Поскольку $y(-x) = \sin(-x) - x = -\sin x - x = -(\sin x + x) = -y(x)$, то $y = \sin x + x$ — нечетная функция.

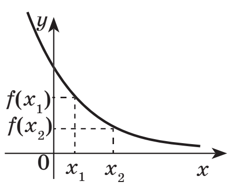
б) Поскольку $y(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = y(x)$ то $y = x^2 \cos x$ — четная функция.

в) Поскольку $y(-x) = \operatorname{tg}(-x) + (-x)^2 = -\operatorname{tg} x + x^2 \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция $y = \operatorname{tg} x + x^2$ — функция общего вида (ни четная, ни нечетная).

3.1.6. Возрастание (убывание) функции

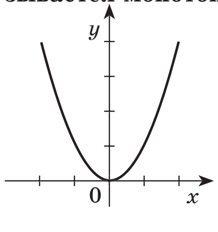


Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции $f(x)$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.



Функция $y = f(x)$ называется убывающей на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции $f(x)$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется монотонной на этом промежутке.



Функция $y = x^2$ не является монотонной на всей области определения, если при $x \in (-\infty; 0]$ она является убывающей, а при $x \in [0; +\infty)$ является возрастающей.

Возрастание (убывание) тригонометрической функции

Функция $y = \sin x$ не является монотонной на всей области определения, однако внутри каждого из интервалов $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ она является возрастающей, а внутри каждого из интервалов $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k \in Z$ — убывающей.

Функция $y = \cos x$ внутри каждого из интервалов $-\pi + + 2\pi k \le x \le 2\pi k$ является возрастающей, а внутри каждого из интервалов $2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k$, где $k \in Z$, — убывающей.

Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ внутри каждого из интервалов $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, является возрастающей.

Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ внутри каждого из интервалов $\pi k < x < \pi + \pi k$, где $k \in Z$, является убывающей.

П р и м е р. Найдите промежутки монотонности функции: $y = \sin 2x$.

Решение. Пусть $2x = t$, тогда $y = \sin t$, и, учитывая свойства функции $y = \sin t$, имеем:

а) Функция возрастает внутри каждого интервала:

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le t \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$, тогда

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le 2x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{4} + \pi k \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

б) Функция убывает внутри каждого интервала:

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le t \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$, тогда

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le 2x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{4} + \pi k \le x \le \frac{3\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$; функция убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$.

Возрастание (убывание) показательной функции

Функция $y = a^x$, где $a > 1$ является **возрастающей** на всей числовой прямой.

Функция $y = a^x$, $0 < a < 1$ является **убывающей** на всей числовой прямой.

П р и м е р 1. Среди функций $y = \pi^x$, $y = \pi^{-x}$, $y = (\sqrt{2})^x$, $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ укажите:

а) возрастающие; б) убывающие.

Решение.

а) функции $y = \pi^x$, $y = (\sqrt{2})^x$ возрастают на всей числовой прямой (поскольку $\pi > 1$, $\sqrt{2} > 1$).

б) Функции $y = \pi^{-x} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$, $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ — убывают на всей числовой прямой (поскольку $0 < \frac{1}{\pi} < 1$, $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$).

П р и м е р 2. Найдите промежутки монотонности функции: $y = 2^{|x|}$.

Решение. Область определения — R.

Если $x \le 0$, то $|x| = -x$ и $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывает.

Следовательно, функция $y = 2^{|x|}$ убывает, если $x \in (-\infty; 0]$.

Если $x \ge 0$, то $|x| = x$ и $y = 2^x$ — возрастает.

Следовательно, функция $y = 2^{|x|}$ возрастает, если $x \in [0; +\infty)$.

Ответ: убывает, если $x \in (-\infty; 0]$; возрастает, если $x \in [0; +\infty)$.

Возрастание (убывание) логарифмической функции

Функция $y = \log_a x$, где $a > 1$, является **возрастающей** в области определения $x > 0$.
Функция $y = \log_a x$, где $0 < a < 1$, является **убывающей** в области определения $x > 0$.

Пример. Среди функций $y = \log_\pi x$, $y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$, $y = \log_{\sqrt{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$ укажите:

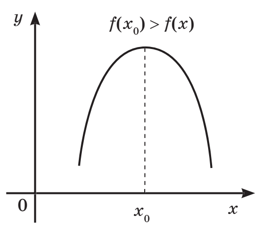
а) возрастающие;
б) убывающие.
Решение.

а) Функции $y = \log_\pi x$, $y = \log_{\sqrt{2}} x$ возрастают при $x > 0$ (поскольку $\pi > 1$ и $\sqrt{2} > 1$).

б) Функции $y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$, $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$ убывают при $x > 0$ (поскольку $0 < \frac{1}{\pi} < 1$, $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$).

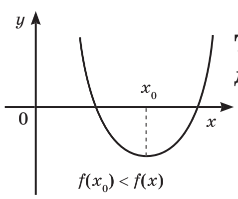
Пример 2. Найдите промежутки монотонности функции: $y = |\lg x|$.
Решение. Область определения функции $x > 0$.
Если $0 < x \le 1$, то $|\lg x| = -\lg x$. Так как $\lg x$ возрастает на промежутке $(0; 1)$, то $-\lg x$ убывает на этом промежутке, следовательно $y = |\lg x|$ убывает на промежутке $(0; 1]$.
Если $x \ge 1$, то $|\lg x| = \lg x$. Так как $\lg x$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$, то и функция $y = |\lg x|$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.
Ответ: убывает на промежутке $(0; 1]$, возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.

3.1.7. Экстремумы функции



Точка $x = x_0$ — **точка максимума**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x).$$



Точка $x = x_0$ — **точка минимума**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0), выполняется неравенство:

$$f(x_0) < f(x).$$

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — **точки экстремума** (от латинского слова *extremun* — «крайний»).

x_0 — точка максимума	→	точки экстремума	←	x_0 — точка минимума
$f(x_0)$ — максимум функции	→	экстремумы функции	←	$f(x_0)$ — минимум функции

Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке $(x_0 - \delta;\ x_0]$ и убывает (возрастает) на некотором промежутке $[x_0;\ x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$.

Пример. Найдите точки экстремумов и экстремумы функции: $y = x^4 - 2x^2$.

Решение. Функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$.

Функция возрастает на каждом из промежутков $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$.

Таким образом, точки $x = -1$, $x = 1$ являются точками минимума, а точка $x = 0$ — точкой максимума. Соответствующие им экстремальные значения равны -1; 1 и 0.

Ответ: точки максимума $x = -1$, $x = 1$; максимумы -1; 1 точка минимума $x = 0$, минимум 0.

3.1.8. Наибольшее (наименьшее) значение функции

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на отрезке $[ab]$ функции $y = f(x)$, имеющей конечное число максимумов (минимумов), нужно вычислить значение функции в каждой точке максимума (минимума) и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее (наименьшее).

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ принято обозначать через $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, а наименьшее — через $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, если $x \in [0; 3]$;

б) $f(x) = 2x - x^2 + 2$, если $x \in [0; 3]$.

Решение.

а) Функция $f(x) = x^2 - 4x + 6$ имеет точку минимума $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2$. Поскольку $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 4 + 6 = 2$, $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 = 6$, $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = 15 - 12 = 3$, то

$$\max_{x\in[0;3]} f(x) = f(0) = 6, \quad \min_{x\in[0;3]} f(x) = f(2) = 2.$$

б) Функция $f(x) = 2x - x^2 + 2$ имеет точку максимума $x_0 = \dfrac{-2}{-2} = 1$. Поскольку $f(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 3$, $f(0) = 2 \cdot 0 - 0^2 + 2 = 2$, $f(3) = 2 \cdot 3 - 3^2 + 2 = 8 - 9 = -1$, то

$$\max_{x\in[0;3]} f(x) = f(1) = 3, \quad \min_{x\in[0;3]} f(x) = f(3) = -1.$$

Наибольшее (наименьшее) значение тригонометрической функции

Наибольшее значение функции $y = \sin x$ равно 1 и достигается в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Наименьшее значение функции $y = \sin x$ равно -1 и достигается в точках $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Наибольшее значение функции $y = \cos x$ равно 1 и достигается в точках $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Наименьшее значение функции $y = \cos x$ равно -1 и достигается в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Наибольшее и **наименьшее** значения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ в области их определения не существуют.

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции: $y = \dfrac{1}{3 - \sin x}$.

Решение. $-1 \le \sin x \le 1$. $1 \ge -\sin x \ge -1$ или $-1 \le -\sin x \le 1$;

$3 - 1 \le 3 - \sin x \le 3 + 1$ или $2 \le 3 - \sin x \le 4$, тогда

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3-\sin x} \geq \frac{1}{4} \text{ или } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\sin x} \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\max\limits_{x\in R} y = \frac{1}{2}$, $\min\limits_{x\in R} y = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\max\limits_{x\in R} y = \frac{1}{2}$, $\min\limits_{x\in R} y = \frac{1}{4}$.

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции: $y = 3\cos 3x + 4\sin 3x$.
Решение. $y = 3\cos 3x + 4\sin 3x =$

$$= \sqrt{3^2+4^2}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos 3x + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 3x\right) =$$

$$= 5\left(\frac{3}{5}\cos 3x + \frac{4}{5}\sin 3x\right) = 5(\cos\alpha\cos 3x + \sin\alpha\sin 3x) = 5\cos(3x-\alpha).$$

Тогда $\max\limits_{x\in R} y = 5$; $\min\limits_{x\in R} y = -5$.

Наибольшее (наименьшее) значение показательной функции

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, **наибольшего** и **наименьшего** значения на области определения не имеет.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
а) $y = 2^x$ на промежутке $[-1; 2]$;
б) $y = 2^{-x}$ на промежутке $[-1; 2]$.
Решение.

а) Поскольку функция $y = 2^x$ непрерывная, не имеет точек экстремумов и $y(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, $y(2) = 2^2 = 4$, то $\max\limits_{x\in[-1;2]} y = y(2) = 4$; $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = y(-1) = \frac{1}{2}$.

б) Поскольку функция $y = 2^{-x}$ непрерывная, не имеет точек экстремумов и $y(-1) = 2^{-(-1)} = 2$, $y(2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, то $\max\limits_{x\in[-1;2]} y = y(-1) = 2$; $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = y(2) = \frac{1}{4}$.

Ответ: а) $\max\limits_{x\in[-1;2]} y = y(2) = 4$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = y(-1) = \frac{1}{2}$;

б) $\max\limits_{x\in[-1;2]} y = y(-1) = 2$, $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = y(2) = \frac{1}{4}$.

Наибольшее (наименьшее) значение логарифмической функции

Функция $y = \log_a x$, где $a > 0$; $a \neq 1$, **наибольшего** и **наименьшего** значений на области определения не имеет.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:
а) $f(x) = \lg x$, где $x \in [0{,}001; 10]$;
б) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, где $x \in [0{,}25; 16]$.
Решение.

а) Поскольку функция $f(x) = \lg x$ непрерывная и не имеет точек экстремумов при $x > 0$ и $f(0{,}001) = \lg 0{,}001 = -3$, $f(10) = \lg 10 = 1$, то $\max\limits_{x\in[0{,}001;10]} f(x) = f(10) = 1$, $\min\limits_{x\in[0{,}001;10]} f(x) = f(0{,}001) = -3$.

б) Поскольку функция $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ непрерывная и не имеет точек экстремумов при $x > 0$ и $f(0,25)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$, $f(16)=\log_{\frac{1}{2}}16=-4$, то $\max\limits_{x\in[0,25;16]} f(x)=f(0,25)=2$, $\min\limits_{x\in[0,25;16]} f(x)=f(16)=-4$.

Ответ:

а) $\max\limits_{x\in[0,001;10]} f(x)=f(10)=1$, $\min\limits_{x\in[0,001;10]} f(x)=f(0,001)=-3$;

б) $\max\limits_{x\in[0,25;16]} f(x)=f(0,25)=2$, $\min\limits_{x\in[0,25;16]} f(x)=f(16)=-4$.

3.1.9. Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на всей области определения $D(f)$, если существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \le C$ для каждой точки $x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной, если ее область значений ограничена, т. е. если все ее значения лежат на каком-нибудь конечном промежутке. В противном случае функцию называют неограниченной.

Функция, ограниченная на множестве $X \subset D(f)$, может быть неограниченной на всей области определения. Например, функция $y=\frac{1}{x}$ ограничена при $x\in\left[\frac{1}{10};10\right]$, но на всей области определения она является неограниченной.

Ограниченность тригонометрической функции

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ **ограничены** на всей области определения: $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$.

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ **не являются ограниченными** на всей области определения.

П р и м е р 1. Докажите, что функция $y = 3\cos 3x + 4\sin 3x$ ограничена.

Решение. Так как при каждом $x \in \mathrm{R}$ справедливы неравенства:

$3\cos 3x + 4\sin 3x \le 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 7$; $3\cos 3x + 4\sin 3x \ge 3\cdot(-1) + 4\cdot(-1) = -7$,

то функция $5\cos 3x + 2\sin 3x$ ограничена.

Оценки очень грубые, значений 7 и –7 данная функция не достигает.

Можно предложить более точные оценки:

$$3\cos 3x+4\sin 3x=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos 3x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 3x\right)=$$

$$=5\left(\frac{3}{5}\sin 3x+\frac{4}{5}\sin 3x\right)=5(\sin\alpha\cos 3x+\cos\alpha\sin 3x)=5\sin(\alpha+3x).$$

Так как $-5 \le 5\sin(\alpha + 3x) \le 5$, то $-5 \le y \le 5$.

Ограниченность показательной функции

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, **ограничена снизу**, т. е. $a^x > 0$.

П р и м е р. Докажите, что функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-2$ ограничена.

Решение. Область определения функции $x \in \mathrm{R}$.

Поскольку $0 \le |x|$, то $0<\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\le 1$, то $0-2<\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-2\le 1-2$, т. е. $-2 < y \le -1$, т. е. функция ограничена.

Ограниченность логарифмической функции

Функция $y = \log_a x$, $a > 0$; $a \neq 1$, **не является ограниченной** на всей области определения.

П р и м е р. Исследуйте, является ли ограниченной функция: $y = \log_2 (2 + \sin x)$.
Решение. Область определения $x \in R$.
Если $x \in R$, то $-1 \leq \sin x \leq 1$, тогда
$2 - 1 \leq 2 + \sin x \leq 1 + 2$, т. е. $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$;
$\log_2 1 \leq \log_2 (2 + \sin x) \leq \log_2 3$, т. е. $0 \leq y \leq \log_2 3$.
Следовательно, функция $y = \log_2 (2 + \sin x)$ является ограниченной.

3.1.10. Сохранение знака функции

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. остается положительной или отрицательной), называются промежутками знакопостоянства функции.

Например, для функции $y = x$, $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$.

Ясно, что значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, — это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox; эти точки называют нулями функции.

Для нахождения промежутков, на которых функция положительная (отрицательная), достаточно решить неравенство: $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Сохранение знака тригонометрической функции

Функция $y = \sin x$ **положительная** на промежутке $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ и **отрицательная** на промежутках $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in Z$.

Функция $y = \cos x$ **положительная** на промежутках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ и **отрицательная** на промежутках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ **положительная** на промежутках $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ и **отрицательная** на промежутках $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n$, $n \in Z$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ **положительная** на промежутках $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ и **отрицательная** на промежутках $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in Z$.

П р и м е р. Найдите промежутки знакопостоянства функции: $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Пусть $\frac{x}{2} = t$, тогда $y = \operatorname{tg} t$ и по свойствам функции $y = \operatorname{tg} t$ имеем:

а) $y > 0$, если $\pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, тогда $\pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, отсюда $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) $y < 0$, если $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \pi n$, $n \in Z$, тогда $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{2} < \pi n$, $n \in Z$, отсюда $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $y > 0$, если $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;
$y < 0$, если $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in Z$.

Сохранение знака показательной функции

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, **положительная** для всех $x \in \mathrm{R}$.

П р и м е р. Найдите промежутки знакопостоянства функции: $y = 2 - 2^x$.
Решение.
а) $y > 0$, если $2 - 2^x > 0$; $2^x < 2$; $x < 1$; $x \in (-\infty; 1)$;
б) $y < 0$, если $2 - 2^x < 0$; $2^x > 2$; $x > 1$; $x \in (1; +\infty)$.
Ответ: $y > 0$, если $x \in (-\infty; 1)$; $y < 0$, если $x \in (1; +\infty)$.

Сохранение знака логарифмической функции

Функция $y = \log_a x$, где $0 < a < 1$, **положительная**, если $x \in (0; 1)$ и **отрицательная**, если $x \in (1; +\infty)$.
Функция $y = \log_a x$, где $a > 1$, **положительная**, если $x \in (1; +\infty)$ и **отрицательная**, если $x \in (0; 1)$.

П р и м е р. Найдите промежутки знаконопостоянства функции: $y = 2 - \lg x$.
Решение.
а) $y > 0$, если $2 - \lg x > 0$; $2 > \lg x$; $\lg x < \lg 100$; $\begin{cases} x < 100, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in (0; 100)$;

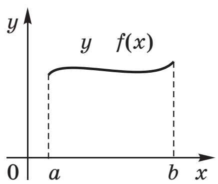
б) $y < 0$, если $2 - \lg x < 0$; $2 < \lg x$; ;$\lg x > \lg 100$; $\begin{cases} x > 100, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in (100; +\infty)$.

Ответ: $y > 0$, если $x \in (0; 100)$;
$y < 0$, если $x \in (100; +\infty)$.

3.1.11. Связь между свойствами функции и ее графиком

Используя график функции $y = f(x)$, можно определить область определения функции, область значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, точки экстремумов и промежутки монотонности, наибольшее и наименьшее значения функции и др.

Область определения функции

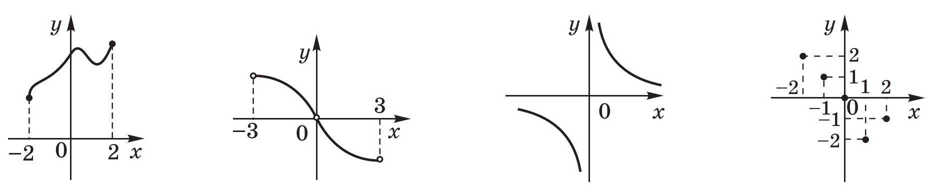


Для того чтобы, пользуясь графиком функции $y = f(x)$, найти ее **область определения**, достаточно спроектировать точки графика на ось Ox.

Таким образом, область определения — это проекция графика функции на ось Ox.

На рисунке областью определения функции $y = f(x)$ является промежуток $[a; b]$.

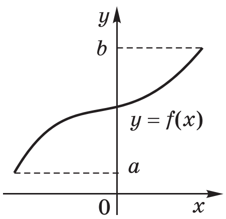
П р и м е р. Найдите область определения функций, изображенных на рисунках.



а *б* *в* *г*

Решение.
а) $[-2; 2]$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
б) $(-3; 0) \cup (0; 3)$; г) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

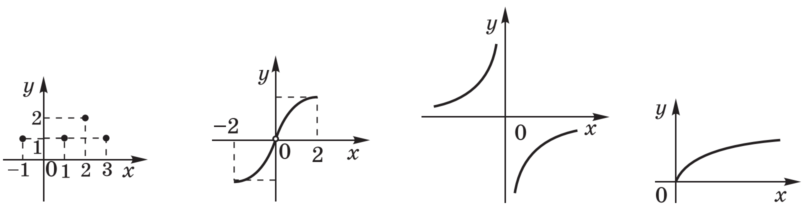
Множество значений функции



Для того чтобы, пользуясь графиком функции, найти **множество значений** функции $y = f(x)$, достаточно спроектировать точки графика на ось Oy. Таким образом, область значений функции — проекция графика функции на ось Oy.

На рисунке областью значений функции $y = f(x)$ является промежуток $[a; b]$.

П р и м е р. Найдите область значений функций, изображенных на рисунках.



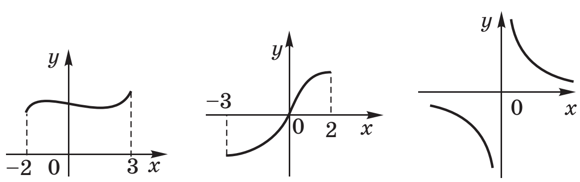
а *б* *в* *г*

Решение.
а) $\{1; 2\}$; б) $[-2; 0) \cup (0; 2]$;
в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$.

Непрерывность функции

Если график функции можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, то такую функцию называют **непрерывной**. Иными словами, функция непрерывна в данной точке, если при малом изменении аргумента ее значение будет изменяться незначительно.

П р и м е р. Укажите промежутки непрерывности функций, графики которых изображены на рисунках.

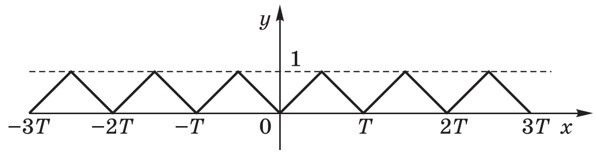


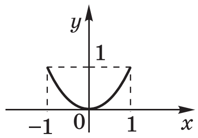
а *б* *в*

Решение.
а) Функция непрерывна на промежутке $[-2; 3]$.
б) Функция непрерывна на множестве $x \in [-3; 0) \cup (0; 2)$.
в) Функция непрерывна на множестве $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Ответ: а) $[-2; 3]$;
б) $[-3; 0) \cup (0; 2)$;
в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

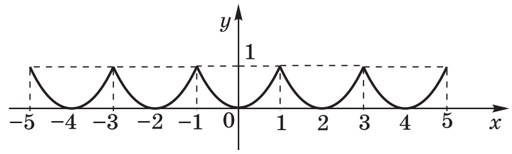
Периодичность функции

График функции на промежутке $[0; T]$ бесконечно повторяется вправо и влево.





Пример. На рисунке изображена часть графика периодической функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1; 1]$, длина которого равна периоду функции. Построить график функции на всей числовой прямой.
Решение.

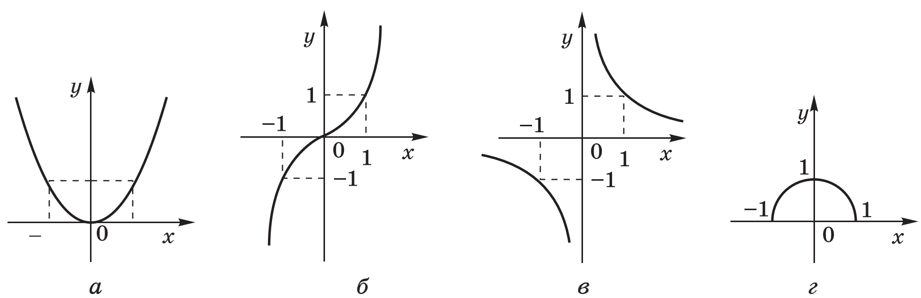


Четность (нечетность) функции

Если функция $y = f(x)$ является **четной**, то ее график симметричен относительно оси ординат и наоборот, если график функции симметричен относительно оси ординат, то функция является четной.

Если функция $y = f(x)$ является **нечетной**, то ее график симметричен относительно начала координат, и наоборот, если график функции симметричен относительно начала координат, то функция является **нечетной**.

Пример. Исследуйте на четность (нечетность) функции, графики которых изображены на рисунках.



Решение.
а) Функция четная, поскольку график функции симметричен относительно оси Oy.
б) Функция нечетная, поскольку график функции симметричен относительно начала координат.
в) Функция нечетная, поскольку график симметричен относительно начала координат.
г) Функция четная, поскольку график функции симметричен относительно оси Oy.

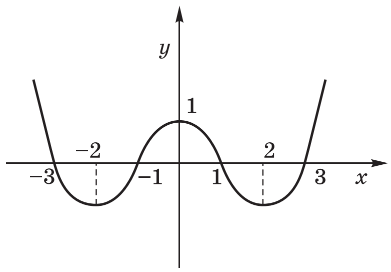
Возрастание (убывание) функции

Промежутки возрастания — это участки оси Ox, где график идет вверх.

Промежутки убывания — это участки оси Ox, где график идет вниз.

Промежутки монотонности — это промежутки, на которых функция или возрастает, или убывает.

Пример. Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, укажите промежутки ее монотонности.



Решение. Функция убывает на каждом из промежутков: $(-\infty; -2]$, $[0; 2]$.

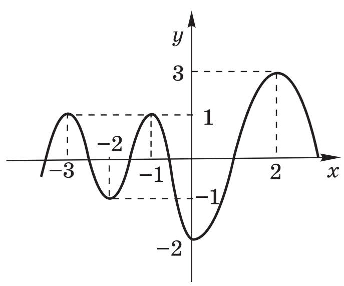
Функция возрастает на каждом из промежутков: $[-2; 0]$, $[2; +\infty)$.

Экстремумы функции

Точки экстремума — точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках.

На графике функции точки экстремума — это абсциссы вершины графика: точка максимума — это абсцисса точки графика, в которой график переходит из промежутка возрастания в промежуток убывания; точка минимума — это абсцисса точки графика, в которой график переходит из промежутка убывания в промежуток возрастания.

Пример. Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, укажите точки экстремумов и экстремумы этой функции.



Решение. Точки максимумов: $x = -3$; $x = -1$; $x = 2$; значения максимумов: $y = 1$; $y = 1$; $y = 3$.

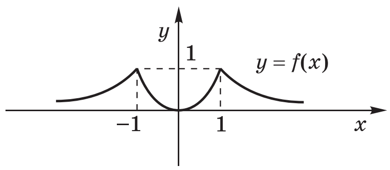
Точки минимумов: $x = -2$; $x = 0$; минимумы: $y = -1$; $y = -2$.

Наибольшее (наименьшее) значение функции

Наибольшее значение — это ордината самой высокой точки графика.

Наименьшее значение — это ордината самой низкой точки графика.

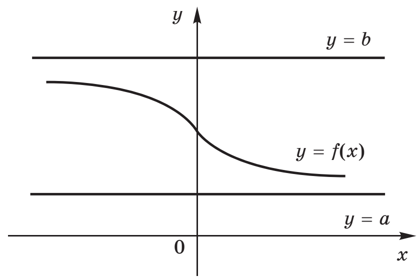
Пример. Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, найдите наибольшее и наименьшее значения функции.



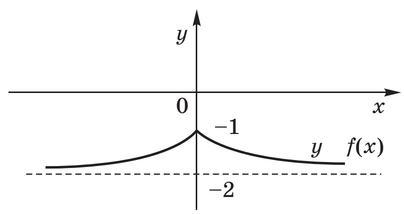
Решение.
$\max\limits_{x\in \mathrm{R}} f(x) = f(-1) = f(1) = 1;\ \ \min\limits_{x\in \mathrm{R}} f(x) = f(0) = 0.$

Ограниченность функции

Ограниченная функция имеет ограниченную область значений, т. е. все ее значения лежат на конечном промежутке (существуют прямые $y = a$ и $y = b$, которые ограничивают график функции снизу и сверху $a < f(x) < b$).



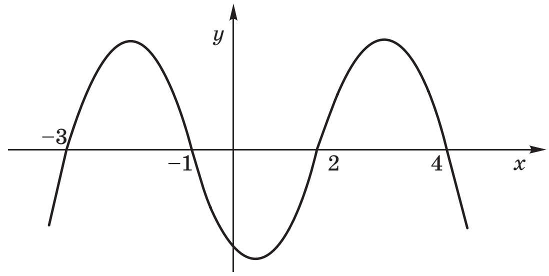
П р и м е р 1. Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, укажите числа m и M, такие, что $m < f(x) \le M$.



Решение. Задача имеет неоднозначное решение: в качестве M следует взять число, не меньшее -1, в качестве m можно взять число, не большее -2.
$m \le -2 < f(x) \le -1 \le M.$

Сохранение знака функции

Для нахождения **промежутков постоянного знака**, т. е. промежутков, на которых функция положительная (отрицательная), достаточно указать участки оси Ox, соответствующие точкам графика, лежащим выше (ниже) оси Ox.



П р и м е р . Используя график функции $y = f(x)$, укажите промежутки, на которых функция: а) положительная; б) отрицательная.

Решение.

а) $f(x) > 0$ на промежутках $(-3; -1)$, $(2; 4)$;

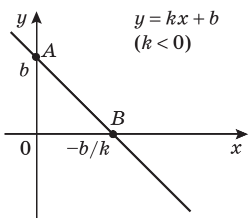
б) $f(x) < 0$ на промежутках $(-\infty; -3)$, $(-1; 2)$, $(4; +\infty)$.

Распознавание графиков элементарных функций и их свойств

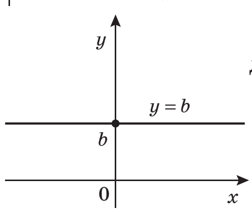
Линейная функция и ее график

Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые фиксированные числа, называется **линейной.**

Областью определения линейной функции $y = kx + b$ является множество всех действительных чисел $\mathrm{R} = (-\infty; +\infty)$.



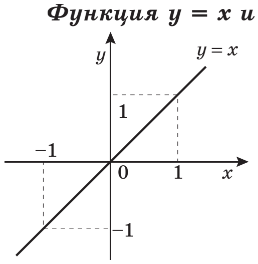
Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая линия. Для построения графика $y = kx + b$ достаточно знать координаты двух точек этого графика. Взяв $x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow A\ (0; b)$ — точка пересечения графика с осью Oy. Взяв $y = 0 \Rightarrow\ x = -\dfrac{b}{k}\ (k \neq 0) \Rightarrow\ B\left(-\dfrac{b}{k}; 0\right)$ — точка пересечения графика с осью Ox. Таким образом, точки пересечения графика функции $y = kx + b$ с осями координат $B\left(-\dfrac{b}{k}; 0\right)$, $A\ (0; b)$, если $k \neq 0$.



При $k = 0$ получаем прямую $y = b$, которая параллельна оси Ox и совпадает с осью Ox, если $b = 0$.

Функция вида $y = kx$ $(k \neq 0)$ называется **прямой пропорциональностью**, где k — коэффициент прямой пропорциональности. Графиком функции $y = kx$ является прямая, которая проходит через начало координат.

Функция $y = x$ и ее график



Графиком функции $y = x$ является прямая линия, которая проходит через начало координат и является биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов.

Свойства функции $y = x$

1) $D(f) = \mathrm{R}$;
2) $E(f) = \mathrm{R}$;
3) нули функции: $y = 0$ при $x = 0$ (функция $y = x$ имеет только один нуль в начале координат);
4) функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty; 0)$; функция принимает положительные значения при $x \in (0; +\infty)$;
5) функция возрастает на всей области определения;
6) функция не имеет экстремумов;
7) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = x$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $y = \dfrac{k}{x}$ и ее график

Функция вида $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ называется **обратной пропорциональностью**; k называется коэффициентом обратной пропорциональности. Областью определения функции $y = \dfrac{k}{x}$ является множество

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = \mathrm{R}\setminus\{0\}.$$

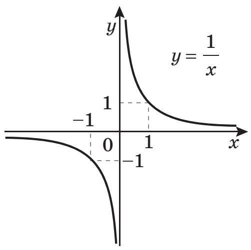
Графиком функции $y=\dfrac{k}{x}$ является гипербола. Если $k>0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных углах; если $k>0$, то ветви гиперболы расположены во II и IV координатных углах.

Функция $y=\dfrac{1}{x}$ и ее график

Рассмотрим более подробно функцию $y=\dfrac{k}{x}$ при $k = 1$ $\left(y=\dfrac{1}{x}\right)$.

Составим таблицу, учитывая, что при $x = 0$ функция не определена.

x	–3	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	3
y	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$	–1	–2	2	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$



Построим график функции $y=\dfrac{1}{x}$. Это гипербола.

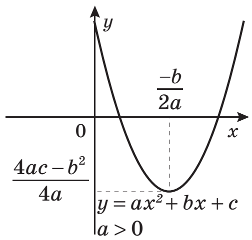
Свойства функции $y=\dfrac{1}{x}$

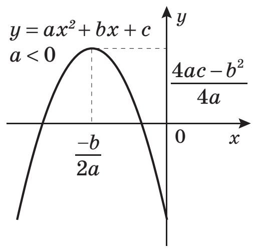
1) $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty) = \mathrm{R}\backslash\{0\}$;
2) $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty) = \mathrm{R}\backslash\{0\}$;
3) функция $y=\dfrac{1}{x}$ не имеет нулей, так как уравнение $\dfrac{1}{x}=0$ не имеет корней, график функции $y=\dfrac{1}{x}$ не пересекает ось Ox;
4) функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty;\ 0)$ и положительные значения при $x \in (0;\ +\infty)$;
5) функция $y=\dfrac{1}{x}$ убывает при $x \in (-\infty;\ 0)$, а также при $x \in (0;\ +\infty)$;
6) функция не имеет экстремумов;
7) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y=\dfrac{1}{x}$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат;
8) график функции $y=\dfrac{1}{x}$ не пересекает ось Oy, но при неограниченном приближении x к нулю ветви гиперболы неограниченно приближаются к оси Oy. При неограниченном увеличении x ветви гиперболы неограниченно приближаются к оси Ox, нигде ее не пересекая. Говорят, что оси Ox и Oy — асимптоты гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$, ось Oy — вертикальная асимптота графика функции $y=\dfrac{1}{x}$, ось Ox — горизонтальная асимптота графика функции $y=\dfrac{1}{x}$.

Квадратичная функция и ее график

Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные числа ($a \neq 0$), называется **квадратичной**. Область определения квадратичной функции $D(y) = \mathrm{R}$.

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является **парабола**. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a > 0$, то ветви направлены вниз. Прямая $x=-\dfrac{b}{2a}$ является осью симметрии.





Для построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ ее приводят к виду $y = a\ (x + m)^2 + p$ путем выделения полного квадрата. Полный квадрат выделяется следующим образом:

$$y = ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$\frac{c}{a}\Bigg) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right.\right.$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

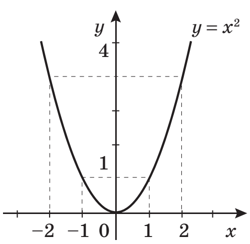
Таким образом,

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 + p,$$

где $m = \frac{b}{2a}$, $p = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Точка с координатами $(-m; p) = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ является вершиной параболы.

Функция $y = x^2$ и ее график



Составим таблицу некоторых значений функции.

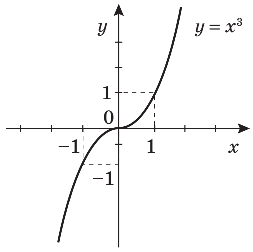
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Графиком функции $y = x^2$ является парабола, вершина которой совпадает с началом координат, а ветви параболы направлены вверх.

Свойства функции $y = x^2$

1) $D(f) = \mathrm{R}$;
2) $E(f) = [0; +\infty)$;
3) функция имеет один нуль: $y = 0$ при $x = 0$;
4) функция принимает положительные значения при $x \in \mathrm{R}\setminus\{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
5) функция возрастает при $x \in (0; +\infty)$, функция убывает при $x \in (-\infty; 0)$;
6) функция имеет минимум при $x = 0$ ($\min y = y\ (0) = 0$);
7) $y(-x) = y(x) \Rightarrow$ функция $y = x^2$ четная, ее график симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = x^3$ и ее график



Составим таблицу значений функции.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–1	0	1	8

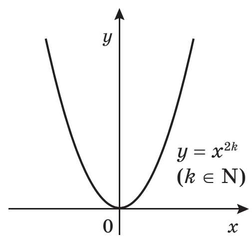
Графиком функции $y = x^3$ является кубическая парабола.

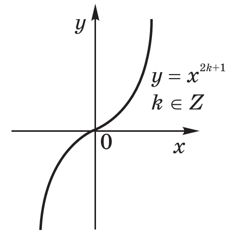
Свойства функции $y = x^3$

1) $D(f) = \mathrm{R}$;
2) $E(f) = \mathrm{R}$;
3) функция имеет один нуль: $y = 0$ при $x = 0$.
4) функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty;\ 0)$, функция принимает положительные значения при $x \in (0;\ +\infty)$;
5) функция возрастает на всей области определения;
6) функция не имеет экстремумов;
7) $y(-x) = -\,y(x) \Rightarrow$ функция $y = x^3$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

Степенная функция с натуральным показателем $y = x^n$ ($n \in N$)

Рассмотрим функцию $y = x^n$, где $n \in \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{R}$. При $n = 1$ получаем $y = x$ — линейную функцию, изученную ранее. Пусть теперь $n > 1$. Если n — четное натуральное число ($n = 2k$, $k \in \mathrm{N}$), то свойства функции $y = x^{2k}$ такие же, как и у функции $y = x^2$. Если n — нечетное натуральное число, большее или равное 3($n = 2k + 1$, $k \in \mathrm{N}$), то свойства функции $y = x^{2k+1}$ такие же, как и у функции $y = x^3$. Поэтому приведем общий вид графиков функций $y = x^{2k}$ и $y = x^{2k+1}$.

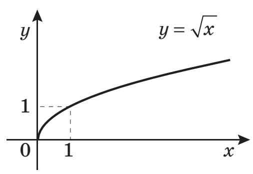




Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Составим таблицу некоторых значений, учитывая, что функция определена при $x \geq 0$.

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

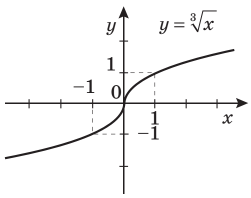


Построим график функции $y = \sqrt{x}$.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

1) $D(f) = [0;\ +\infty)$;
2) $E(f) = [0;\ +\infty)$;
3) функция $y = \sqrt{x}$ имеет один нуль: $y = 0$ при $x = 0$;
4) функция принимает положительные значения при $x \in (0;\ +\infty)$;
5) функция возрастает при $x \in (0;\ +\infty)$;
6) функция имеет минимум при $x = 0$, $\min y = y\ (0) = 0$;
7) функция $y = \sqrt{x}$ ни четная, ни нечетная, то есть $y = \sqrt{x}$ является функцией общего вида.

Функция $y = \sqrt[3]{x}$ и ее график



Составим таблицу.

x	–8	–1	0	1	8
y	–2	–1	0	1	2

Построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
3) функция имеет один нуль: $y = 0$ при $x = 0$;
4) функция принимает положительные значения при $x \in (0; +\infty)$; функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty; 0)$;
5) функция возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$, т. е. на всей области определения;
6) функция не имеет экстремумов;
7) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $y = |x|$ и ее график

$|x|$ — модуль x (абсолютная величина x). Эта функция определяется так:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}.$$

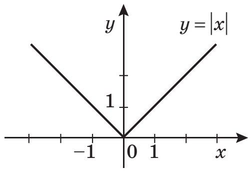


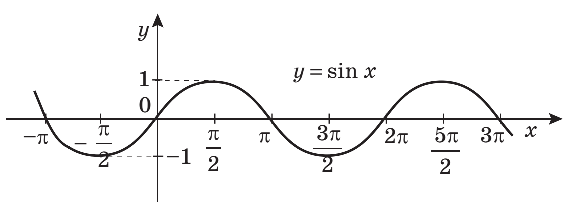
График функции $y = |x|$ изображен на рисунке.

Функция $y = |x|$ определена при $x \in$ R, принимает только неотрицательные значения. Таким образом, $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; функция $y = |x|$ обращается в нуль при $x = 0$. При $x \in (-\infty; 0)$ функция убывает, при $x \in (0; +\infty)$ функция $y = |x|$ возрастает. Поскольку $y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$, то функция $y = |x|$ четная.

Замечание. В общем случае можно рассмотреть модуль функции:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}.$$

Функция $y = \sin x$ и ее график



Свойства функции $y = \sin x$

1) область определения — вся числовая прямая, т. е. $D(\sin x) =$ R;
2) область значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. $E(\sin x) = [-1; 1]$;
3) функция $y = \sin x$ — нечетная, т.к. $\sin(-x) = -\sin x$; график симметричен относительно начала координат;
4) функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$;
5) нули функции: $\sin x = 0$ при $x = k\pi$, $k \in$ Z.

6) интервалы знакопостоянства:

а) $\sin x > 0$, если $x \in (2k\pi;\ \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$;

б) $\sin x < 0$, если $x \in (-\pi + 2k\pi;\ 2k\pi)$, $k \in Z$;

7) интервалы возрастания и убывания:

а) функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z;$$

б) функция $y = \sin x$ убывает на промежутках

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z;$$

8) экстремумы функции:

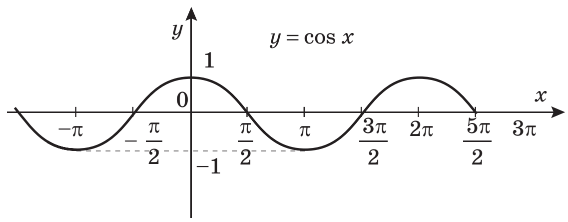
а) $y_{\max} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$;

б) $y_{\min} = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$;

9) функция $y = \sin x$ является ограниченной, $|\sin x| \le 1$.

График функции $y = \sin x$ называется **синусоидой**.

Функция $y = \cos x$ и ее график



Свойства функции $y = \cos x$

1) область определения — вся числовая прямая, т. е. $D(\cos x) = R$;

2) область значений — отрезок $[-1;\ 1]$, т. е. $E(\cos x) = [-1;\ 1]$;

3) функция $y = \cos x$ — четная, т.к. $\cos(-x) = \cos x$; график симметричен относительно оси Oy;

4) функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$;

5) нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.;$

6) интервалы знакопостоянства:

а) $\cos x > 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z;$

б) $\cos x > 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z.;$

7) интервалы возрастания и убывания:

а) функция $y = \cos x$ возрастает на промежутках $x \in (-\pi + k\pi;\ 2k\pi)$, $k \in Z$;

б) функция $y = \cos x$ убывает на промежутках $x \in (2k\pi;\ \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$;

8) экстремумы функции:

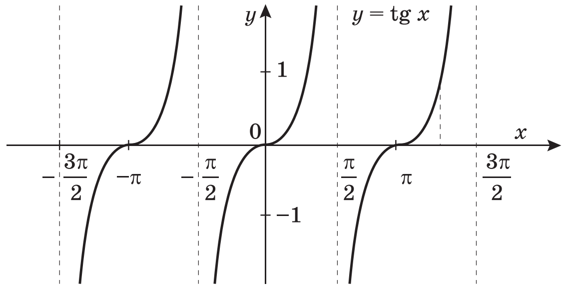
а) $y_{\max} = 1$ при $x = 2k\pi$, $k \in Z$;

б) $y_{\min} = -1$ при $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$;

9) функция $y = \cos x$ является ограниченной, $|\cos x| \le 1$.

График функции $y = \cos x$ называется **косинусоидой**.

Функция* $y = \mathbf{tg}\,x$ *и ее график



Свойства функции $y = \mathrm{tg}\,x$

1) область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in \mathrm{Z})$, т. е. $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi.$

Иначе

$$D(\mathrm{tg}\,x)=\left\{x \mid x\in \mathrm{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in \mathrm{Z}\right\}\right\};$$

2) область значений — вся числовая прямая, т. е. $E(\mathrm{tg}\,x) = \mathrm{R}$;
3) функция $y = \mathrm{tg}\,x$ — нечетная, т.к. $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\,x$; график симметричен относительно начала координат;
4) функция периодическая с основным периодом $T = \pi$;
5) нули функции: $\mathrm{tg}\,x = 0$ при $x = k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$;
6) интервалы знакопостоянства:
   а) $\mathrm{tg}\,x > 0$, если $x\in\left(k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in \mathrm{Z};$
   б) $\mathrm{tg}\,x < 0$, если $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;k\pi\right), k\in \mathrm{Z};$
7) интервалы возрастания и убывания: функция $y = \mathrm{tg}\,x$ возрастает на промежутках

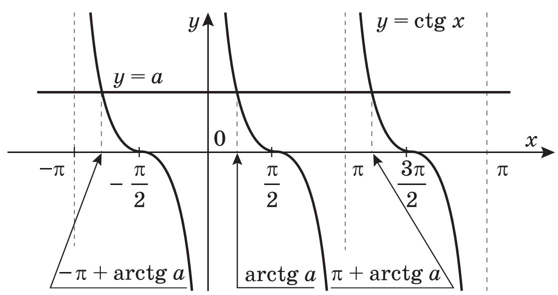
$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in \mathrm{Z};$

8) функция $y = \mathrm{tg}\,x$ экстремумов не имеет;
9) функция $y = \mathrm{tg}\,x$ неограниченная.

График функции $y = \mathrm{tg}\,x$ называется **тангенсоидой.**

Прямые $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in \mathrm{Z})$ называются **вертикальными асимптотами** графика функции $y = \mathrm{tg}\,x$.

Функция* $y = \mathbf{ctg}\,x$ *и ее график



Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

1) область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), т. е. $D(\operatorname{ctg} x) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$;
2) область значений — вся числовая прямая, т. е. $E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$;
3) функция $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетная, т.к. $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$; график симметричен относительно начала координат;
4) функция периодическая с основным периодом $T = \pi$;
5) нули функции: $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
6) интервалы знакопостоянства:

   а) $\operatorname{ctg} x > 0$, если $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$; б) $\operatorname{ctg} x < 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
7) интервалы возрастания и убывания: функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутках $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
8) функция $y = \operatorname{ctg} x$ экстремумов не имеет;
9) функция $y = \operatorname{ctg} x$ неограниченная.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называется **котангенсоидой.**

Прямые $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) называются **вертикальными асимптотами** графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Обратные тригонометрические функции

Функции, обратные функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ на соответствующих интервалах, называются **обратными тригонометрическими**. Они обозначаются: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ не являются монотонными на всей области их определения. Поэтому для образования обратных функций выделяют интервалы монотонности.

Функция $y = \arcsin x$ и ее график

Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$.

Поэтому функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется **арксинусом** и обозначается $y = \arcsin x$. Таким образом, **арксинусом числа** x называется число y из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, такое, что его синус равен x. Математически это можно записать так:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin(\arcsin x) = x, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \ -1 \le x \le 1.$$

Геометрически $\arcsin x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x.

Например: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (т. к. $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$),

$$\arcsin 0 = 0, \ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

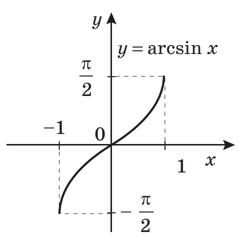


График функции $y = \arcsin x$ изображен на рисунке. Этот график симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$.

Свойства функции $y = \arcsin x$

1) $D(\arcsin x) = [-1; 1]$;

2) $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, т. е. $y = \arcsin x$ — нечетная функция;

4) функция $y = \arcsin x$ возрастающая;

5) $\sin(\arcsin x) = x$ при $x \in [-1; 1]$.

Функция $y = \arccos x$ и ее график

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ убывает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$. Поэтому функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется **арккосинусом** и обозначается $y = \arccos x$. Таким образом, **арккосинусом числа** x называется число y из отрезка $[0; \pi]$, такое, что его косинус равен x. Математически это можно записать так: $y = \arccos x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos(\arccos x) = x,\ 0 \le y \le \pi,\ -1 \le x \le 1$.

Геометрически $\arccos x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен x.

Например: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ (т. к. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ 0 \le \frac{\pi}{3} \le \pi$), $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$,

(ошибочно записывать $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, т.к. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{3} \notin [0; \pi]$).

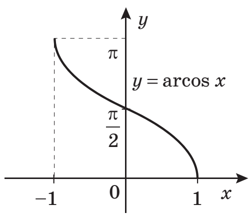


График функции $y = \arccos x$ изображен на рисунке. Этот график симметричен графику функции $y = \cos x$ относительно прямой $y = x$.

Свойства функции $y = \arccos x$

1) $D(\arccos x) = [-1; 1]$;

2) $E(\arccos x) = [0; \pi]$;

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, т. е. функция $y = \arccos x$ является функцией общего вида;

4) функция $y = \arccos x$ убывающая;

5) $\cos(\arccos x) = x$ при $x \in [-1; 1]$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ и ее график

Функция $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает и принимает все числовые значения, т.к. $E(\operatorname{tg} x) = \mathrm{R}$. Поэтому функция $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется **арктангенсом** и обозначается $y = \operatorname{arctg} x$. Таким образом, **арктангенсом числа** x называется число y из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что его тангенс равен x. Математически это можно записать так:

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},\ -\infty > x > \infty.$$

Геометрически $\operatorname{arctg} x$ означает величину угла (дуги), заключенного в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x.

Например: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (т. к. $\operatorname{tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$), $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

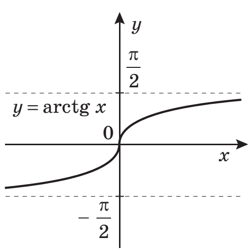


График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рисунке. Этот график симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$. Прямые $y = \pm\frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами графика функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1) $D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; \infty)$;

2) $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, т. е. функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечетной;

4) функция $y = \operatorname{arctg} x$ является возрастающей;

5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ при $x \in (-\infty; \infty)$.

Функция y = arcctg x и ее график

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$ убывает и принимает все числовые значения, т.к. $E(\operatorname{ctg} x) = \mathrm{R}$. Поэтому функция $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется **арккотангенсом** и обозначается $y = \operatorname{arcctg} x$. Таким образом, **арккотангенсом числа** x называется число y из интервала $(0; \pi)$, такое, что его котангенс равен x. Математически это можно записать так:

$$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ 0 > y > \pi,\ -\infty > x > \infty.$$

Геометрически $\operatorname{arcctg} x$ означает величину угла (дуги), заключенного в интервале $(0; \pi)$, котангенс которого равен x.

Например: $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ (т. к. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$, $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$), $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = +\frac{5\pi}{6}$.

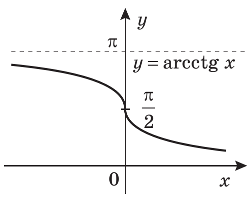


График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рисунке. Он симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно прямой $y = x$. Прямые $y = 0$, $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами графика функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

1) $D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \infty)$;

2) $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$;

3) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, т. е. функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является функцией общего вида;

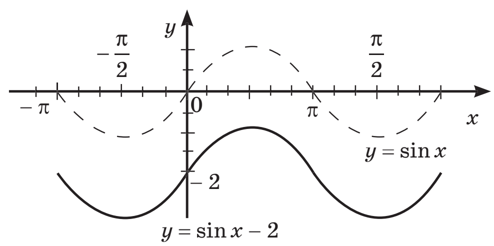
4) функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывающая;

5) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ при $x \in (-\infty; \infty)$.

Построение графиков тригонометрических функций

1. $y = f(x) + a$

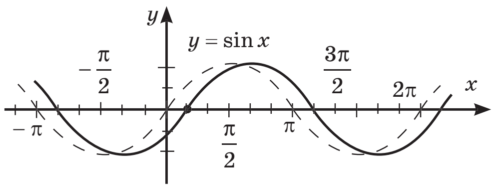
Для построения графика $y = f(x) + a$ необходимо график $f(x)$ сместить на a единиц вдоль оси Oy.



Параллельный перенос графика $y = \sin x$
на 2 единицы вниз вдоль оси Oy

2. $y = f(x + a)$

Для построения графика $y = f(x + a)$ необходимо график $y = f(x)$ переместить вдоль оси на Ox на $-a$ единиц.



$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Параллельный перенос графика по оси

Ox на $\frac{\pi}{6}$ единиц вправо

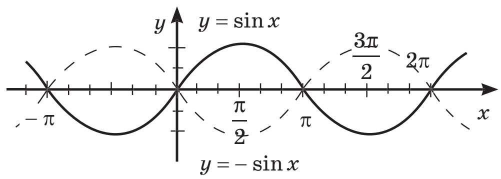
3. $\boldsymbol{y = -f(x)}$; $\boldsymbol{y = f(-x)}$

Для построения графика $y = -f(x)$ необходимо график $y = f(x)$ симметрично отобразить относительно оси Ox.

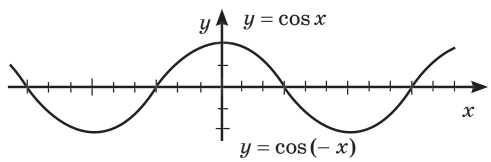
Поскольку $\sin(-x) = -\sin x$, то график функции $y = \sin(-x)$ строится аналогично.

Аналогично построение графика $y = \operatorname{tg}(-x)$ ($\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg}(-x)$ ($\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$).

Заметим, что $\cos(-x) = \cos x$, и достаточно построить график $y = \cos x$.



Симметрия относительно оси Ox

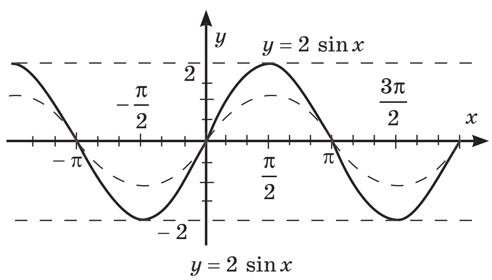


Симметрия относительно оси Ox

4. $\boldsymbol{y = kf(x)}$

Для построения графика $y = kf(x)$ необходимо ординаты всех точек графика умножить на k (абсциссы не изменяются).

Если $k > 1$, то $y = kf(x)$ получают растяжением вдоль оси Oy на k единиц; если $0 > k > 1$, то сжатием в $1/k$ раз. Деформации выполняются перпендикулярно оси Ox.



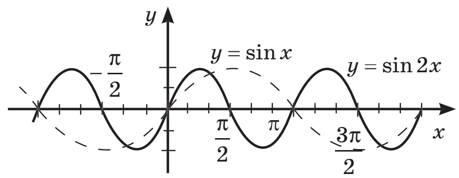
Растяжение вдоль оси Oy в 2 раза

5. $\boldsymbol{y = f(kx)}$, $\boldsymbol{k > 0}$

Для построения графика $y = f(kx)$, $k > 0$ необходимо все абсциссы графика $y = f(x)$ разделить на k, оставив ординаты без изменения.

При $k > 1$ график $y = f(kx)$ получают из графика $y = f(x)$ сжатием вдоль оси Ox в k раз, а при $0 < k < 1$ — растяжением $y = f(x)$ в $\dfrac{1}{k}$ раз.

Деформации графика перпендикулярны оси Oy.

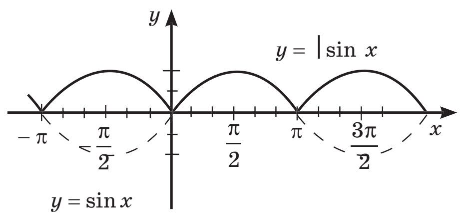


$y = \sin 2x$

Сжатие вдоль оси Ox в 2 раза, $T = \pi$

6. $y = |f(x)$

Для построения графика $y = |f(x)$ необходимо положительную часть графика $y = f(x)$ оставить без изменения, а отрицательную часть $y = f(x)$ отобразить симметрично относительно оси Ox.



$y = |\sin x$

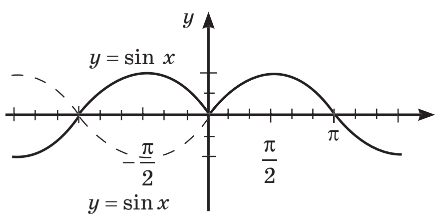
Выше оси Ox — без изменения, ниже — симметрия относительно Ox

7. $y = f(\ x\ )$

Для построения графика $y = f(\ x\ )$ надо рассмотреть:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{при } x \geq 0; \\ f(-x), \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $x \geq 0$ строим график $y = f(x)$, а при $x < 0$ строим график, симметричный построенному относительно оси Oy



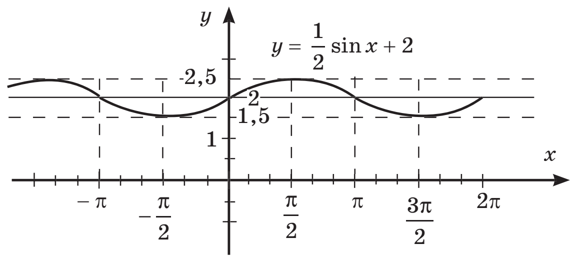
$y = \sin\ x$

Справа от Oy — без изменения, слева — эта же часть, симметрия относительно Oy

Примеры построения графиков тригонометрических функций

I. $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}\sin x + 2}$

1. Строим график $y = \sin x$.



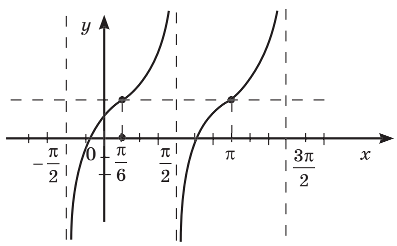
2. Сжимаем график $y = \sin x$ в 2 раза к оси Ox, т. е. область значения графика $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, получим график $y = \frac{1}{2}\sin x$.

3. Поднимаем график $y = \frac{1}{2}\sin x$ на 2 единицы вверх вдоль оси Oy, получиаем график $y = \frac{1}{2}\sin x + 2$.

II. $\boldsymbol{y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1}$

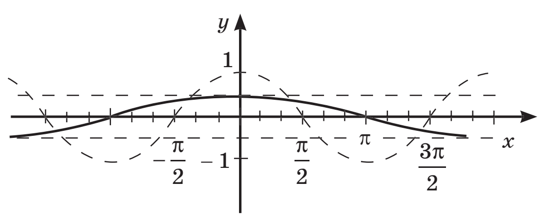
1. Строим график $y = \operatorname{tg} x$.

2. Переносим график вдоль оси Oy на единицу вверх и вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{6}$ единиц вправо, получаем график $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.



III. $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}}$

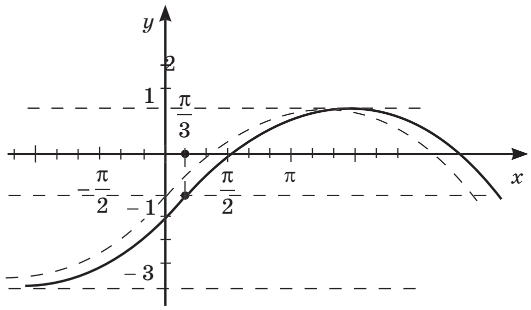
1. Строим график функции $y = \cos x$.



2. График функции $y = \cos x$ растягиваем вдоль оси Ox в 2 раза, т. е. $T = 4\pi$ $\left(T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\right)$. Получим график $y = \cos\frac{x}{2}$.

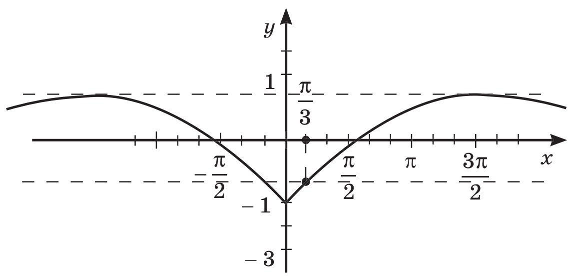
3. График функции $y = \cos\frac{x}{2}$ сжимаем в 3 раза вдоль оси Oy, получим $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$.

IV. $\boldsymbol{y = 2\sin\left(\frac{|x|}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 1}$



1. Преобразуем функцию к виду: $y = 2\sin\frac{1}{2}\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

2. Строим график $y = \sin x$.



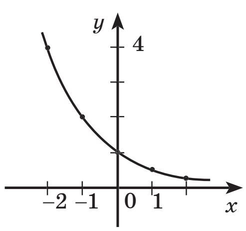
3. Растягиваем график $y = \sin x$ вдоль оси Ox в 2 раза ($T = 4\pi$), получим $y = \sin\frac{1}{2}x$.

4. Строим график $y = 2\sin\frac{1}{2}x$ растяжением графика $y = \sin\frac{1}{2}x$ вдоль оси Oy.

5. Перенесем график $y = 2\sin\frac{1}{2}x$ вдоль оси Ox вправо на $\frac{\pi}{3}$ единиц и вниз по оси Oy на 1 единицу, получим график $y = 2\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

6. Чтобы получить график $y = 2\sin\frac{1}{2}\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$, правую часть графика оставим без изменения и ту же часть отобразим симметрично относительно оси Oy.

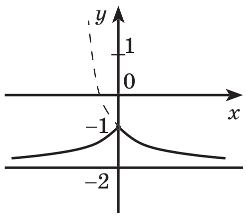
П р и м е р. Построить график $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 2\right|$.



Решение. 1) Построим график $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$. Для этого найдем координаты некоторых точек:

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2) Построим график $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

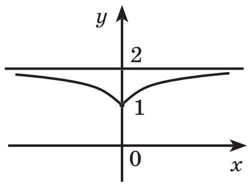


Справа от оси Оy (и на оси) $f(x)$ — без изменения, слева эта же часть — симметрия относительно оси Оy.

3) Построим график $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 2.$

Параллельный перенос вдоль оси Оy на (–2) единицы.

4) Построим график $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 2\right|.$



Выше Оx график должен остаться без изменений, но таких точек нет, поэтому точки, расположенные ниже Оx, отразим симметрично относительно Оx.

3.1.12. Значения функции

Значением функции $y = f(x)$ в точке x_0 является $y_0 = f(x_0)$.

Значения тригонометрической функции

П р и м е р 1. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$. Найдите: $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Решение. Обе части равенства $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$ возведем в квадрат: $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = m^2$, тогда $\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = m^2$. Учитывая, что $\operatorname{tg} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, имеем $\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = m^2$, отсюда $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = m^2 - 2$.

Ответ: $m^2 - 2$.

П р и м е р 2. Сравните числа:

а) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{4}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$; в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

Решение.

а) Поскольку числа $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{5}$ принадлежат промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция $y = \cos t$ убывает, то из условия $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{5}$ следует, что $\cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{5}$.

б) Поскольку числа $-\frac{\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{5}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, на котором функции $y = \sin t$ возрастает, то из условия $-\frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{5}$ вытекает, что $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$.

в) Поскольку числа $\frac{3\pi}{5}$ и $\frac{3\pi}{8}$ принадлежат соответственно промежуткам $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ и $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} < 0$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} > 0$, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

г) Поскольку числа $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{5}$ принадлежат промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция $y = \operatorname{ctg} t$ убывает, то из условия $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{5}$ вытекает, что $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

Ответ: а) $\cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{5}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$; в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

Значения показательной функции

П р и м е р 1. Сравните числа:

а) $\sqrt{0{,}115^3}$ и $\sqrt{0{,}115^4}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}7}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}7^3}}$.

Решение.

а) $\sqrt{0{,}115^3} = 0{,}115^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{0{,}115^4} = 0{,}115^2$.

Поскольку функция $y = 0{,}115^x$ убывающая и $\dfrac{3}{2} < 2$, то $\sqrt{0{,}115^3} > \sqrt{0{,}115^4}$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}7}} = 0{,}7^{-\frac{1}{2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}7^3}} = 0{,}7^{-\frac{3}{2}}$.

Поскольку $-\dfrac{1}{2} > -\dfrac{3}{2}$ и функция $y = 0{,}7^x$ убывает, то $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}7}} < \dfrac{1}{\sqrt{0{,}7^3}}$.

Ответ: а) $\sqrt{0{,}115^3} > \sqrt{0{,}115^4}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}7}} < \dfrac{1}{\sqrt{0{,}7^3}}$.

Значения логарифмической функции

П р и м е р 1. Вычислите:

а) $\log_2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

а) Поскольку $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, то $\log_2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

б) Поскольку $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, то $\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right) = \lg 1 = 0$.

Ответ: а) –1; б) 0.

П р и м е р 2. Сравните:

а) $3^{\log_3 4}$ и $5^{\log_4 4}$; б) $4^{\log_5 7}$ и $7^{\log_5 4}$; в) $3^{\log_2 5}$ и $5^{\log_2 3}$.

Решение.

а) Поскольку $3^{\log_3 4} = 4$ и $5^{\log_4 4} = 5^1 = 5$, то $3^{\log_3 4} < 5^{\log_4 4}$.

б) Поскольку $4^{\log_5 7} = 4^{\log_5 7} = 5^{\log_5 4 \log_5 7} = = (5^{\log_5 7})^{\log_5 4} = 7^{\log_5 4}$, то $4^{\log_5 4} = 7^{\log_5 4}$.

в) Поскольку $3^{\log_2 5} = 5^{\log_5 3 \cdot \log_2 5} = 5^{\log_2 5 \log_5 3} = 5^{\frac{\log_2 5 \cdot \log_2 3}{\log_2 2 \cdot \log_2 5}} = 5^{\log_2 3}$, то $3^{\log_3 5} = 5^{\log_2 3}$.

Ответ: а) $3^{\log_3 4} < 5^{\log_4 4}$; б) $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$; в) $3^{\log_3 5} = 5^{\log_2 3}$.

Значения рациональной функции

П р и м е р 1. Найдите значение выражения:

$\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}$.

Решение. $\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{22})(7 - \sqrt{22})} = \sqrt[3]{49 - 22} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Ответ: 3.

П р и м е р 2. Расположите в порядке возрастания числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{6}$.

Решение. Так как $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$ и функция $y=\sqrt[6]{x}$ возрастает, то $\sqrt[6]{6}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$, и, следовательно, $\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.

П р и м е р 3. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Решение.

$$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}=$$
$$=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=\sqrt[4]{49-48}=\sqrt[4]{1}=1.$$

Ответ: 1.

3.1.13. Свойства сложных функций

Если y является функцией от u: $y=f(u)$, где u, в свою очередь, является функцией от аргумента x, т. е. $u=g(x)$, то y называют сложной функцией от x: $y=f(g(x))$, причем $y=f(u)$ называют внешней функцией, а $g(x)$ — внутренней функцией.

Область определения сложной функции

При нахождении области определения сложной функции следует учитывать следующее.

Функция	Область определения
$y=\sqrt[2n]{f(x)}$, где $n\in\mathrm{N}$	$f(x)\geq 0$
$y=\log_a f(x)$, $a>0$, $a\neq 1$	$f(x)>0$
$y=\log_{f(x)} g(x)$	$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)>0 \end{cases}$
$y=\operatorname{tg} f(x)$	$f(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathrm{Z}$
$y=\operatorname{ctg} f(x)$	$f(x)\neq \pi n,\ n\in\mathrm{Z}$
$y=\arcsin f(x)$	$-1\leq f(x)\leq 1$
$y=\arccos f(x)$	$-1\leq g(x)\leq 1$

Область определения сложной функции $y=f(x)$ состоит из таких значений аргумента x, которые содержатся в области определения функции $g(x)$ и для которых значения функции $g(x)$ принадлежат области определения функции f.

П р и м е р. Найдите область определения функции: $y=\dfrac{\lg x}{\sqrt{3x^2-5x+2}}$.

Решение. Областью определения данной функции будут те значения x, при которых подлогарифмическое выражение положительное, знаменатель дроби не равен нулю, а подкоренное выражение неотрицательное.

$$\begin{cases} x>0, \\ 3x^2-5x+2>0; \end{cases} \begin{cases} x\in(0;+\infty), \\ x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty); \end{cases} x\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty).$$

Ответ: $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Множество значений сложной функции

П р и м е р. Найдите область значений функции:

$y = \sqrt{x^2 - x - 6}.$

Решение. Рассмотрим данную функцию как сложную: $y = \sqrt{t}$, где $t = x^2 - x - 6$. Функция $t = x^2 - x - 6$ задает параболу, ветви которой направлены вверх, а вершиной является точка $(0,5; -6,25)$. Поэтому областью значений функции $t = x^2 - x - 6$ является промежуток $[-6,25; +\infty)$.

Следовательно, t может принимать значения из промежутка $[-6,25; +\infty)$, в частности, все значения из промежутка $[0; +\infty)$, который является областью определения функции $y = \sqrt{t}$. Поэтому областью значений функции $y = \sqrt{t}$, как и функции $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$, является промежуток $[0; +\infty)$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

Непрерывность сложной функции

Если функция $y = f(x)$ **непрерывна** в точке x_0, а функция $g(u)$ **непрерывна** в точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x_0))$ **непрерывна** в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(f(x_0)).$$

Более того, для сложной функции $g(f(x))$ верно также следующее утверждение: если функция $g(u)$ непрерывна в точке $u = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(A).$$

П р и м е р. Исследуйте на непрерывность функцию:

$y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$

Решение. Данная функция существует всюду, где $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, т. е. $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. Данная функция непрерывна во всех точках области определения, т. е. при $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: функция непрерывна, если $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Периодичность сложной функции

Если функция $y = f(x)$ **периодическая** и имеет период T, то функция $y = Af(kx + b)$, где A, k, b — постоянные ($k \neq 0$), также **периодическая**, причем ее период равен $\dfrac{T}{|k|}$.

П р и м е р 1. Какие из данных функций периодические?

Найдите для периодических функций наименьший положительный период.

а) $y = \operatorname{tg} 3x$; б) $y = 5$; в) $y = \cos\dfrac{x}{3}$; г) $y = \{3x\}$.

Решение.

а) Функция $y = \operatorname{tg} 3x$ — периодическая, наименьший положительный период $T = \dfrac{\pi}{3}$.

б) Функция $y = 5$ — периодическая, наименьшего положительного периода не существует, любое число является ее периодом.

в) Функция $y = \cos\dfrac{x}{3}$ — периодическая, наименьший положительный период $T = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$.

г) Функция $\{3x\}$ — периодическая, наименьший положительный период $T = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: а) $T = \dfrac{\pi}{3}$; б) периодическая, наименьшего положительного периода нет; в) 6π; г) $T = \dfrac{1}{3}$.

Четность (нечетность) сложной функции

Пример. Исследуйте на четность (нечетность) функцию:

а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt[4]{4 - x^2}}{x}$; в) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$.

Решение.

а) Область определения функции находим из условия $1 - x^2 \geq 0$; $x^2 \leq 1$; следовательно, $-1 \leq x \leq 1$.

Поскольку для любого x из области определения имеем $y(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = y(x)$, то данная функция четная.

б) Область определения данной функции находим из системы:

$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (2 - x)(2 + x) \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ отсюда $x \in [-2;\ 0) \cup (0;\ 2]$.

Поскольку для любого x:

$$y(-x) = \frac{\sqrt[4]{4 - (-x)^2}}{-x} = \frac{\sqrt[4]{4 - x^2}}{-x} = -\frac{\sqrt[4]{4 - x^2}}{x} = -y(x),$$

то заданная функция нечетная.

в) Область определения заданной функции находим из условия $\dfrac{x^2 + 1}{x} \geq 0$, откуда $x > 0$ (т. к. $x^2 + 1 > 0$ для всех x). Поскольку область определения не симметрична относительно начала координат, то данная функция не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям.

Ответ: а) четная; б) нечетная; в) ни четная, ни нечетная.

Возрастание (убывание) сложной функции

Если $f(x)$ — **возрастающая** и положительная на всей числовой прямой функции, то функции $f^2(x)$, $\sqrt{f(x)}$, $\lg f(x)$ **возрастают** на всей числовой прямой, а функция $\dfrac{1}{f(x)}$ **убывает** на всей числовой прямой.

Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве M, то:

а) функция $a^{f(x)}$ при $a > 1$ возрастает (убывает) на M;

б) функция $a^{f(x)}$ при $0 < a < 1$ убывает (возрастает) на M;

в) функция $\log_a f(x)$ при $a > 1$ возрастает (убывает) на M, если $f(x) > 0$;

г) функция $\log_a f(x)$ при $0 < a < 1$ убывает (возрастает) на M, если $f(x) > 0$.

Пример. Укажите промежутки монотонности функции:

1) $y = \log_2 |x|$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x^2$.

Решение.

1) Область определения функции $x \neq 0$.

Если $x < 0$, то $|x|$ — убывающая функция, тогда $y = \log_2 |x|$ — убывает.

Если $x > 0$, то $|x|$ — возрастающая функция, тогда $y = \log_2 |x|$ — возрастает.

2) Область определения функции $x \neq 0$.

Если $x < 0$, то x^2 — убывающая функция, тогда $y = \log_{\frac{1}{2}} x^2$ — возрастает.

Если $x > 0$, то x^2 — возрастающая функция, тогда $y = \log_{\frac{1}{2}} x^2$ — убывает.

Экстремумы сложной функции

П р и м е р. Найдите точки максимумов и точки минимумов функции: $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Пусть $3x + \frac{\pi}{3} = t$, тогда $y = \sin t$ и, учитывая свойства функции $y = \sin t$, имеем: точки максимумов $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

точки минимумов $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Тогда $3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$;

$3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $3x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $3x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$.

Следовательно, $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$ — точки максимумов; $x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$ — точки минимумов.

Наибольшее (наименьшее) значение сложной функции

П р и м е р. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции: $y = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Область определения функции $x \in [-1;\ 1]$.

Если $x \in [-1;\ 1]$, то $\sqrt{1 - x^2}$ принимает значения из промежутка $[0;\ 1]$, а значения функции $y = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{\sqrt{1-x^2}}$ принадлежат промежутку $[1;\ \sqrt{2} + \sqrt{3}]$. Следовательно, $\max\limits_{x\in[-1;1]} y = y(0) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\min\limits_{x\in[-1;1]} y = y(-1) = y(1) = 1$.

Ответ: $\max\limits_{x\in[-1;1]} y = y(0) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\min\limits_{x\in[-1;1]} y = y(-1) = y(1) = 1$.

Ограниченность сложной функции

Если функция $f(x)$ **ограничена**, то функции $\sqrt[n]{f(x)}$, $a^{f(x)}$, $\cos f(x)$, $\sin f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\operatorname{arcctg} f(x)$ **ограничены** на том множестве, на котором они определены.

П р и м е р. Докажите, что функция $y = 2^{\sin^2 x} + 5\cos x$ ограничена.

Решение. $|y| = \left|2^{\sin^2 x} + 5\cos x\right| \le \left|2^{\sin^2 x}\right| + 5|\cos x| \le 2 + 5 = 7$.

Поскольку $-7 \le 2^{\sin^2 x} + 5\cos x \le 7$, то функция ограничена.

Сохранение знака сложной функции

П р и м е р. Найдите промежутки знакопостоянства функции: $y = \lg(x^2 - x + 8) - 1$.

Решение.

а) $y > 0$, если $\lg(x^2 - x + 8) - 1 > 0$; $\lg(x^2 - x + 8) > 1$; $\lg(x^2 - x + 8) > \lg 10$; $\begin{cases} x^2 - x + 8 > 0, \\ x^2 - x + 8 > 10; \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 8 > 10$,

тогда $x^2 - x + 8 > 10$; $x^2 - x - 2 > 0$; $(x + 1)(x - 2) > 0$; $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$.

б) $y < 0$, если $\lg(x^2 - x + 8) - 1 < 0$; $\lg(x^2 - x + 8) < 1$; $\lg(x^2 - x + 8) < \lg 10$; $\begin{cases} x^2 - x + 8 > 0, \\ x^2 - x + 8 < 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x \in R, \\ x^2 - x - 2 < 0; \end{cases}$ тогда $x^2 - x - 2 < 0$; $(x + 1)(x - 2) < 0$; $x \in (-1;\ 2)$.

Ответ: $y > 0$, если $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$; $y < 0$, если $x \in (-1;\ 2)$.

Нули функции

Нули функции — точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль, или иначе, решения уравнения $f(x) = 0$, т. е. абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox.

Пример 1. Найдите нули функции: $y = \lg \lg \lg x$.

Решение. $\begin{cases} x > 0, \\ \lg \lg x = 10^0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ \lg \lg x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ \lg x = 10^1; \end{cases}$

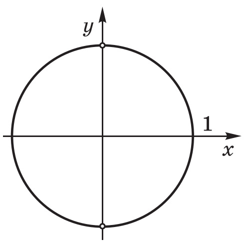
$\begin{cases} x > 0, \\ \lg x = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x = 10^{10}; \end{cases}$ следовательно, $x = 10^{10}$.

Ответ: 10^{10}.

Пример 2. Найдите нули функции: $y = \dfrac{1 + \cos 2x}{\cos x}$.

Решение. Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля:

$$\begin{cases} 1 + \cos 2x = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$



Решаем эту систему:

$$\begin{cases} \cos 2x = -1; \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} 2x = \pi + 2\pi n, \ n \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z. \end{cases}$$

Следовательно, функция нулей не имеет.

Ответ: нулей нет.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.1. «Функции»

Часть 1

Ответом на задания B1–B36 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Укажите наименьшее значение области определения функции $y = \sqrt{x+6}$.

B2

B2. Найдите наименьшее значение области значений функции $y = \sqrt{x^2+4} - 1$.

B3

B3. Задана функция $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Вычислите $\dfrac{f(5)}{f(1)+f(-1)}$.

B4

B4. Задана функция $f(x) = \sqrt{x-3}$. Вычислите $f^2(3) + f(12) + f(52)$.

B5

B5. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 3$.

B6

B6. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x - x^2$.

B7

B7. Сколько нулей имеет функция $y = x^2 - x$?

B8

B8. Сколько целых чисел не входят в область определения функции $y = \sqrt{x^2+x-2}$?

B9

B9. Сколько целых чисел не входят в область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$?

B10. Укажите (в градусах) наименьшее положительное значение x, которое не входит в область определения функции $y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$.

B10

B11. Укажите наибольшее значение области определения функции $y = \arcsin(x + 1)$.

B11

B12. Укажите наименьшее значение области определения функции $y = \arccos(|x| - 1)$.

B12

B13. Найдите наименьшее целое значение x, которое принадлежит области определения функции $y = \arcsin(\log_2 (1 - x))$.

B13

B14. Найдите сумму целых значений x, которые не входят в область определения функции $y = \log_2 (x^2 + x)$.

B14

B15. Найдите сумму натуральных значений x, которые не входят в область определения функции $y = \log_{x-1} 3$.

B15

B16. Укажите длину промежутка, на котором определена функция
$y = \sqrt{x} + \sqrt{9 - x^2}$.

B16

B17. Укажите длину промежутка, на котором определена функция $y = \arcsin (5x - 1)$.

B17

B18. Укажите длину промежутка, на котором определена функция $y = 7^{3\arcsin x}$.

B18

B19. Укажите длину промежутка, на котором функция $y = x^2 - 5x + 6$ неположительная.

B19

B20. Укажите длину промежутка, на котором функция $y = -x^2 + x + 12$ неотрицательная.

B20

B21

B22

B23

B24

B25

B26

B27

B28

B29

B30

B31

B32

B21. Найдите ординату точки пересечения графика функции $y = \dfrac{|x-4|}{x+2}$ с осью Oy.

B22. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \dfrac{x-4}{x+2}$ с осью Ox.

B23. Укажите наименьшее значение функции $y = x^2 - 6|x|$.

B24. Укажите наибольшее значение функции $y = |-x^2 - x + 2|$ на промежутке $[-2; 1]$.

B25. Сколько точек максимума имеет функция $y = |x^2 - 4|x||$?

B26. Сколько точек минимума имеет функция $y = x^2 - 4|x| + 3$?

B27. Найдите длину промежутка, на котором функция $y = \sin(\arcsin x)$ возрастает.

B28. Найдите длину промежутка, на котором функция $y = -\cos x\ (\arccos x)$ убывает.

B29. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sin x - \dfrac{1}{2}$.

B30. Найдите наименьшее значение функции $y = -2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

B31. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$.

B32. Найдите наибольшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sin x - 1} + 2$.

B33. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 2|x - 3| + |x - 4|$.

B33

B34. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 6\sin\frac{x}{2} + 8$.

B34

B35. Найдите наибольшее (наименьшее) значение функции $y = ax^2 + bx - 4$, если $y(1) = 0$ и $y(4) = 0$.

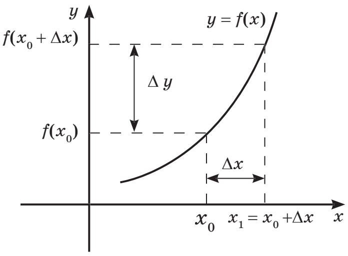
B35

B36. Найдите наибольшее целое значение x, при котором график функции $y = (\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3}$ лежит выше графика функции $y = (1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$.

B36

3.2. Производная функции

Приращение аргумента и функции



$\Delta x = x_1 - x_0$ — приращение аргумента в точке x_0;

$x_1 = x_0 + \Delta x$ — начальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx;

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ — приращение функции в точке x_0;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

П р и м е р 1. Найдите приращение $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ в произвольной точке.

Решение. 1) $x = x_0$; $f(x_0) = 2x_0^2 + 3x_0 - 5$.

2) $x = x_0 + \Delta x$, тогда $f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) - 5 =$

$= 2(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) + 3x_0 + 3\Delta x - 5 = 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5.$

3) Найдем приращение функции:

$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$

$= (2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5) - (2x_0^2 + 3x_0 - 5) = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x + 3).$

Ответ: $\Delta f(x) = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x + 3)$.

Производная функции $f(x)$

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \; y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x}.$$

Операция нахождения производной называется **дифференцированием.**

Таблица производных некоторых функций

Функция $f(x)$	**Производная $f'(x)$**
C (C — const)	0
$kx + b$	k
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$

П р и м е р. По определению найдите производную функции $y = f(x)$ в точке x_0.

а) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $x_0 = 2$.

Решение. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = ((3(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 1) - (3x^2 - 5x + 1) = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 5\Delta x =$
$= \Delta x(6x + 3\Delta x - 5)$;

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 5)}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 5;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(6x + 3\Delta x - 5) = 6x - 5;\ f'(x_0) = f'(2) = 6\cdot 2 - 5 = 7.$$

Ответ: $f'(2) = 7$.

б) $f(x) = \sqrt{7x-5}$; $x_0 = 2$.

Решение. $\Delta f = \sqrt{7(x+\Delta x)-5} - \sqrt{7x-5} = \sqrt{7x+7\Delta x-5} - \sqrt{7x-5}$;

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}}{\Delta x};$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{7x+7\Delta x-5-7x+5}{\Delta x(\sqrt{7x+7\Delta x-5}+\sqrt{7x-5})} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{7}{\sqrt{7x+7\Delta x-5}+\sqrt{7x-5}} = \frac{7}{2\sqrt{7x-5}};$$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{7}{2\sqrt{7\cdot 2-5}} = \frac{7}{6}.$$

Ответ: $\frac{7}{6}$.

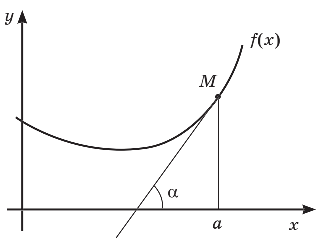
П р и м е р 2. Найдите производные функций: а) $y = x^{25}$; б) $y = \frac{1}{x^{10}}$.

Решение.

а) $y' = (x^{25})' = 25x^{24}$; б) $y' = \left(\frac{1}{x^{10}}\right)' = -\frac{10}{x^{11}}$.

Ответ: а) $25x^{24}$; б) $-\frac{10}{x^{11}}$.

3.2.1. Геометрический смысл производной



Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ — угловой коэффициент касательной:

$$k = f'(a);\ f'(a) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$

Как известно, уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, а в данном случае, поскольку $k = f'(a)$, уравнение касательной в точке $x = a$ имеет вид:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Составление уравнения касательной при $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 1$

1. Вычислить $f(a)$	$f(a) = \frac{1}{1} = 1$
2. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$
3. Подставить найденные значения в формулу	$y = 1 - (x-1)$; $y = 2 - x$. *Ответ:* $y = 2 - x$

П р и м е р 1. К параболе $y = 3x^2 - 5x + 8$ в некоторой точке проведена касательная под углом 45° к оси абсцисс. Найдите точку касания.

Решение. $M(x_0;\ y_0)$ — точка касания. Точка M принадлежит кривой $y = 3x^2 - 5x + 8$, тогда $y_0 = 3x_0^2 - 5x_0 + 8$.

По условию, $y'(x_0) = \operatorname{tg} 45° = 1$. Но $y' = 6x - 5$, тогда $6x_0 - 5 = 1$; $x_0 = 1$; $y_0 = 6$.

Ответ: $M(1;\ 6)$.

П р и м е р 2. К графику функции $y = \dfrac{x^3}{3}$ проведите касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 4x + 7$.

Решение. Если касательная параллельна прямой $y = 4x + 7$, то угловой коэффициент этой касательной $k = 4$.

Но $k = f'(x_0)$. Тогда $f'(x) = x^2$ и $f'(x_0) = x_0^2$; $x_0^2 = 4$; $x_{0_1} = 2$ или $x_{0_2} = -2$.

То есть имеются две касательные, удовлетворяющие условию задачи:

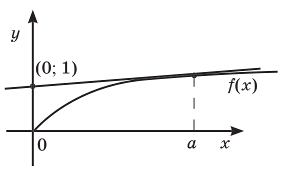
1) $x_0 = 2$, тогда $f(x_0) = f(2) = \dfrac{8}{3}$; $f'(x_0) = f'(2) = 4$;

$$y = \frac{8}{3} + 4(x - 2);\quad y = 4x - \frac{16}{3};$$

2) $x_0 = -2$, тогда $f(x_0) = f(-2) = -\dfrac{8}{3}$; $f'(x_0) = f'(-2) = 4$;

$$y = -\frac{8}{3} + 4(x + 2);\quad y = 4x + \frac{16}{3}.$$

Ответ: $y = 4x - \dfrac{16}{3}$ или $y = 4x + \dfrac{16}{3}$.



П р и м е р 3. Из точки (0; 1) проведите касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$.

Решение. Пусть $x = a$ — абсцисса точки касания, $a > 0$; $f(a) = \sqrt{a}$;

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Подставим найденные значения в уравнение касательной: $y = \sqrt{a} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$.

По условию, касательная проходит через точку (0; 1). Подставим в это уравнение $x = 0$; $y = 1$. Получим, что $a = 4$.

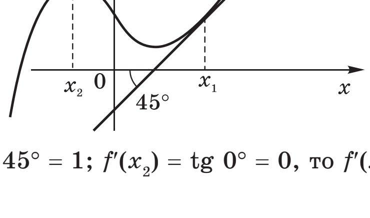
Тогда уравнение касательной имеет вид:

$$y = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x - 4),\ \text{т. е.}\ y = \frac{x}{4} + 1.$$

Ответ: $y = \dfrac{x}{4} + 1$.

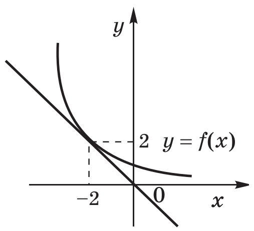
3.2.2. Геометрический смысл производной и график функции

П р и м е р 1. На рисунке изображен график функции и касательные к графику в точках x_1 и x_2. Пользуясь геометрическим смыслом производной, найдите $f'(x_1) + f'(x_2)$.



Решение. Поскольку $f'(x_1) = \operatorname{tg} 45° = 1$; $f'(x_2) = \operatorname{tg} 0° = 0$, то $f'(x_1) + f'(x_2) = 1 + 0 = 1$.

Ответ: 1.

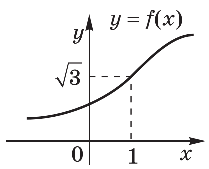


П р и м е р 2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение $f'(x_0)$.

Решение. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{2} = -1.$

Ответ: -1.

3.2.3. Геометрический смысл производной и график производной



П р и м е р. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке $x = 1$.

Решение. $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0) = f'(1) = \sqrt{3}$, тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

3.2.4. Физический смысл производной

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем.

Производная характеризует **скорость изменения функции** при изменении **аргумента**. Если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Например, мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения является производной от функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t.

$s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени;
$v = s'(t)$ — скорость прямолинейного движения;
$a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения.

П р и м е р. Материальная точка движется по закону $s = 4t^3 + t^2 + 8$ (s измеряется в метрах, t — в секундах).

Найдите скорость и ускорение в момент $t = 2$ с.

Решение.

1. $v = s'(t) = 12t^2 + 2t$ — скорость движения точки в любой момент времени t.
2. $v(2) = 12 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 48 + 4 = 52$ (м/с) — скорость движения точки в момент $t = 2$ с.
3. $a = v'(t) = 24t + 2$ — ускорение движения точки в момент t.
4. $a(2) = 24 \cdot 2 + 2 = 50$ (м/с^2) — ускорение движения в момент $t = 2$ с.

Ответ: 52 м/с; 50 м/с^2.

3.2.5. Таблица производных

Производная тригонометрической функции

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x;\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x;\ x \neq \pi n,\ n \in Z$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

П р и м е р 1. Найдите производные функций: а) $y = x \sin x$; б) $y = \dfrac{\cos x}{x}$.

Решение.

а) $y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$;

б) $y' = \left(\dfrac{\cos x}{x}\right)' = \dfrac{(\cos x)' \cdot x - \cos x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

Ответ: а) $\sin x + x \cos x$; б) $\dfrac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

П р и м е р 2. Найдите производную функции: $y = \sin x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

$y' = (\sin x)' = \cos x$; $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$;

Ответ: а) 0.

Производная показательной функции

$$(a^x)' = a^x \ln a; \ (e^x)' = e^x$$

П р и м е р 1. Найдите производную функции:

а) $y = 5^x$; б) $y' = e^{3-2x}$.

Решение.

а) $y' = (5^x)' = 5^x \ln 5$; б) $y' = (e^{3-2x})' = e^{3-2x} \cdot (3 - 2x)' = -2e^{3-2x}$.

Ответ: а) $5^x \ln 5$; б) $-2e^{3-2x}$.

П р и м е р 2. Найдите $f'(0)$, если $f(x) = 5^x$.

Решение.

$f'(x) = (5^x)' = 5^x \ln 5$.

$f'(0) = 5^0 \ln 5 = \ln 5$.

Ответ: $\ln 5$.

Производная логарифмической функции

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

П р и м е р. Найдите производную функции:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \ln (x^2 + 1)$.

Решение.

а) $y' = (\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$; б) $y' = (\ln(x^2 + 1))' = \dfrac{1}{(x^2 + 1)} \cdot (x^2 + 1)' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{x \ln 2}$; б) $\dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

3.2.6. Производная суммы двух функций

Производная суммы функций равна сумме их производных:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

П р и м е р. Найдите производную функции:

Решение. $(\cos x + \sqrt{x})' = (\cos x)' + (\sqrt{x})' = -\sin x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.2.7. Производная произведения двух функций

Производная произведения:

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u}.$$

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(CU(x))' = C \cdot U'(x).$$

Пример. Найдите производную функции: $y = x^2 \sin x$.

Решение.

$y' = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$

3.2.8. Производная частного двух функций

Производная частного:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}^2} \ (\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}); \text{ в частноти } \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{-\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}.$$

Пример. Найдите производную функции: а) $y = \dfrac{3x+2}{\sin x}$; б) $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение. а) $\left(\dfrac{3x+2}{\sin x}\right)' = \dfrac{(3x+2)' \sin x - (\sin x)'(3x+2)}{\sin^2 x} = \dfrac{3 \sin x - (3x+2)\cos x}{\sin^2 x}$.

б) $\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\cos x)'}{(\cos x)^2} = -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

3.2.9. Производная функции вида $y = f(ax + b)$

Пример. Найдите производную функций:

а) $y = \sin(2x + 3)$; б) $y = 2^{3x-1}$; в) $y = \log_2(5x - 1)$.

Решение.

а) $y' = (\sin(2x + 3))' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2\cos(2x + 3)$;

б) $y' = (2^{3x-1})' = 2^{3x-1} \cdot \ln 2 \cdot (3x - 1)' = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-1}$;

в) $y' = (\log_2(5x-1))' = \dfrac{1}{(5x-1)\ln 2} \cdot (5x-1)' = \dfrac{5}{(5x-1)\ln 2}$;

Ответ: а) $2\cos(2x + 3)$; б) $3 \ln 2 \cdot 2^{3x-1}$; в) $\dfrac{5}{(5x-1)\ln 2}$.

3.2.10. Производная сложных функций

Производная сложной функции (функция от функции):

$$(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})))' = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}).$$

Пример. Найдите производные функций: а) $y = \sin 17x$; б) $y = \cos^2 x$.

Решение.

а) $y' = (\sin 17x)' = \cos 17x \cdot (17x)' = 17 \cos 17x$

б) $y' = (\cos^2 x)' = 2\cos \cdot (\cos x)' = 2\cos \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.2. «Производная функции»

Часть 1

Ответом на задания В1–В36 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

В1. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

В2. Найдите производную функции $3x^2 + 5x + 6$ в точке $x = 1$.

В3. Точка движется по закону $s(t) = 1 + 2t^2$ (м). Найдите скорость (в м/с) движения точки в момент $t = 1$ с?

В4. Точка движется по закону $s(t) = t^2 - 4t + 6$ (м). В какой момент времени (в с) скорость движения равна 10 м/с.

В5. Точка движется по закону $s(t) = \dfrac{gt^2}{2}$ (свободное падение). Найдите скорость (в м/с) движения точки в момент $t = 2$ с, $g = 5$ м/с^2.

В6. Найдите угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 2{,}5$.

В7. Найдите угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 + x$ в точке с абсциссой $x = 3$.

В8. Найдите ординату точки пересечения касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$ и осью Oy.

B9. Найдите значение производной функции $f(x) = 6x^2 + e^{4x-4}$ в точке $x_0 = 1$.

B9

B10. Найдите $f'(-1)$, если $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$.

B10

B11. Найдите угол (в градусах) между касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 3$ и положительным направлением оси абсцисс в точке $x_0 = 0{,}5$.

B11

B12. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует с положительным направлением оси Ox угол 45°. Найдите $f'(x_0)$.

B12

B13. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 2 + 20t - 5t^2$. Найдите мгновенную скорость (в м/с) движения точки в момент времени $t = 1$ с (s измеряется в м).

B13

B14. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (время t измеряется в секундах, путь s — в метрах). Найдите ускорение его движения в момент времени $t = 10$ с.

B14

B15. К графику функции $y = -0{,}5x^2$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = -3$. Вычислите тангенс угла наклона этой касательной к положительному направлению оси абсцисс.

B15

B16. Вычислите $f'(1)$, если угол между касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, и положительным направлением оси Ox равен 135°.

B16

B17. Найдите угол (в градусах) между осью Ox и касательной к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M(2; -4)$.

B17

B18

B18. Найдите, при каком значении параметра a касательная к графику функции $y = x^3 + ax^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ проходит через точку $N(3;\ 4)$.

B19

B19. Найдите значение производной функции $f(x) = \sin x + \cos x$ в точке $x_0 = 0$.

B20

B20. Найдите значение производной функции $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + x)$ в точке $x_0 = -1$.

B21

B21. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ в точке $x_0 = 0$.

B22

B22. Найдите значение производной функции $f(x) = x \cos x$ в точке $x_0 = \pi$.

B23

B23. Найдите производную функции $y = \sin (x^2)$ в точке $x = 0$.

B24

B24. Найдите производную функции $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $x = 3$.

B25

B25. Найдите производную функции $y = 3 \sin x - 2 \cos x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

B26

B26. Найдите производную функции $y = \cos^2 x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{12}$.

B27

B27. Найдите производную функции $y = \sin^3 x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{3}$.

B28

B28. Найдите производную функции $y = \ln \sin x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$.

B29

B29. Найдите значение производной функции $y = \dfrac{1-\cos 4x}{\sin 4x}$ в точке $x = -\dfrac{\pi}{8}$.

B30. При каких значениях x значение производной функции $f(x) = x^2 + x$ равно нулю?

B31. Укажите количество промежутков, на которых функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ убывает.

B32. Вычислите значение производной функции $f(x) = 4x \ln x + 5$ при $x = e$.

B33. Вычислите $f'(4)$, если $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$.

B34. Вычислите $g'(1)$, если $g(x) = x \ln x - \dfrac{1}{x}$.

B35. Вычислите значение производной $y = \ln(x\sqrt{1 + x^2})$ в точке $x = 1$.

B36. Вычислите $f'(\ln 3)$, если $f(x) = 5e^x - 8x$.

B30

B31

B32

B33

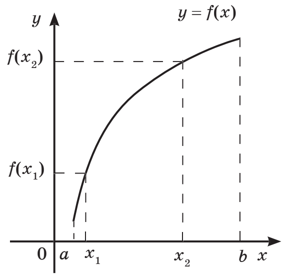
B34

B35

B36

3.3. Исследование функций с помощью производной

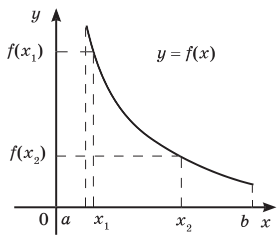
3.3.1. Промежутки монотонности



1. Возрастание и убывание функции на промежутке

Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(a;\ b)$ $\Rightarrow$ $x_1 > x_2$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$ для всех $x_1;\ x_2 \in (a;\ b)$.

Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(a;\ b)$ $\Rightarrow$ $x_1 > x_2$ $\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ для всех $x_1;\ x_2 \in (a;\ b)$.

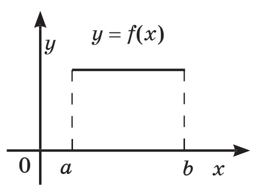


2. Достаточное условие возрастания, убывания функций

Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$ $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;\ b)$.

Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$ $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$ **убывает** на промежутке $(a;\ b)$.

Если функция непрерывна на концах промежутка, то их можно присоединить к промежутку возрастания (убывания) функции.

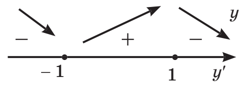
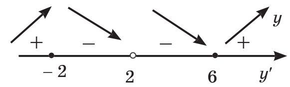


3. Необходимое и достаточное условие постоянства функций

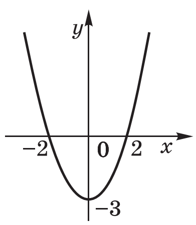
Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\ b)$ $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$ **постоянна** на промежутке $(a;\ b)$.

4. Нахождение промежутков возрастания и убывания функций

$y = 3x - x^3$	$y = \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2}$
1) Найдем область определения функции	
$D(y) = \mathrm{R}$	$D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
2) Найдем производную и разложим ее на множители (если возможно)	
$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(x + 1)$	$y' = \dfrac{(2x+6)(x-2) - (x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$

3) Исследуем знак производной методом интервалов	
	
4) Выбираем промежутки, в которых $f'(x) > 0$; $f'(x) < 0$	
$f'(x) > 0$, $x \in (-1;\ 1)$; $f'(x) < 0$, $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$	$f'(x) > 0$, $x \in (-\infty;\ -2) \cup (6;\ +\infty)$; $f'(x) < 0$, $x \in (-2;\ 2) \cup (2;\ 6)$
5) Записываем промежутки возрастания (убывания) с учетом непрерывности на концах промежутка	
возрастает на $[-1;\ 1]$; убывает на $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$	возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и $[6;\ +\infty)$; убывает на $[-2;\ 2)$ и $(2;\ 6]$

3.3.2. Промежутки монотонности и график производной



П р и м е р 1. По графику производной, изображенному на рисунке, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$:

а) возрастает; б) убывает.

Решение.

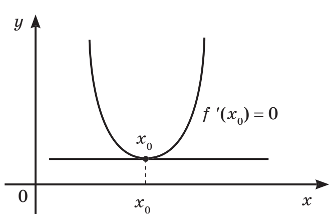
а) Функция возрастает, если $f'(x) > 0$. Так как $f'(x) > 0$, если $x \in (-\infty;\ -2)$; $x \in (2;\ +\infty)$, то функция $f(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty;\ -2]$; $x \in [2;\ +\infty)$. б) Функция убывает, если $f'(x) < 0$. Так как $f'(x) < 0$, если $x \in (-2;\ 2)$, то функция $f(x)$ убывает, если $x \in [-2;\ 2]$.

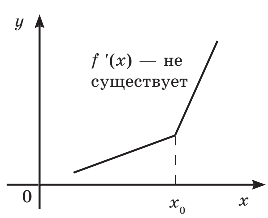
Ответ: а) $x \in (-\infty;\ -2]$, $x \in [2;\ +\infty)$; б) $x \in [-2;\ 2]$.

3.3.3. Экстремумы функции

1. Критические точки функции

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная функция, x_0 — внутренняя точка ее области определения.
Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует $\Rightarrow$ x_0 — **критическая точка**.



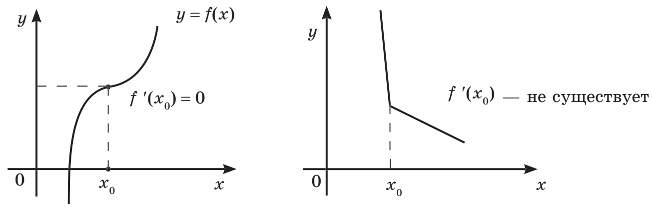


2. Необходимые условия экстремума

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Если x_0 — точка экстремума $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует.

Точки **экстремума необходимо искать** только среди критических точек, но не каждая критическая точка, в которой $f'(x_0) = 0$ или не существует, является точкой экстремума.



$f'(x_0) = 0$, но x_0 не является точкой экстремума

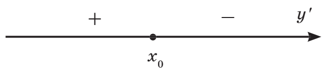
$f'(x_0)$ не существует, но x_0 не является точкой экстремума

3. Достаточные условия экстремума

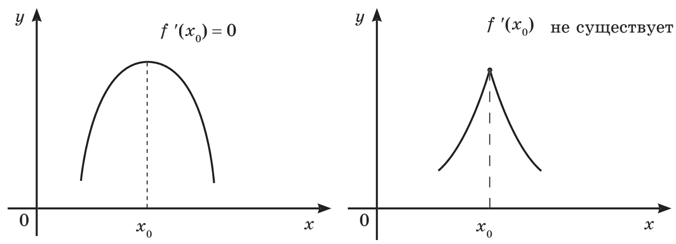
Первый признак

Если x_0 — критическая точка, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует, тогда:

а) если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то

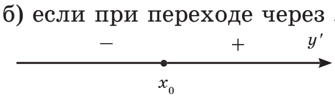


x_0 — точка максимума;

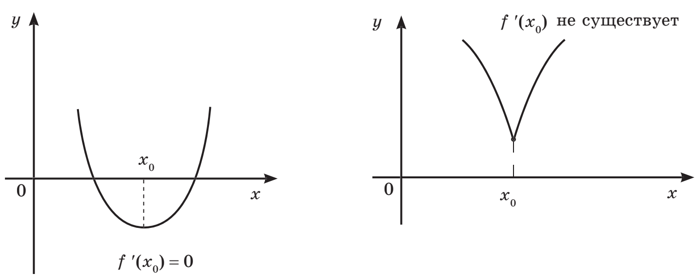


$$x_0 = x_{\max}$$

б) если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то



x_0 — точка минимума.



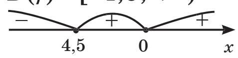
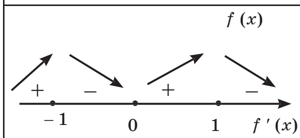
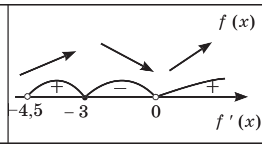
$$x_0 = x_{\min}$$

Второй признак

Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума.

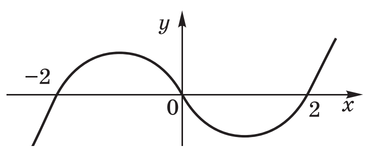
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума.

4. Нахождение точек экстремума и экстремумов функций

$f(x) = 2x^2 - x^4$	$f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$
1) Найдем область определения функции	
$D(f) = \mathrm{R}$	$2x^3 + 9x^2 \geq 0;\ x^2(2x + 9) \geq 0;$ $D(f) = [-4{,}5;\ +\infty)$ 
2) Найдем производную	
$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$	$f'(x) = \dfrac{6x^2 + 18x}{2\sqrt{2x^3 + 9x^2}} = \dfrac{3x(x+3)}{\sqrt{x^2(2x+9)}}$
3) Найдем критические точки: а) $f'(x)$ не существует; б) $f'(x) = 0$	
$f'(x)$ существует для всех $x \in \mathrm{R}$; $f'(x) = 0;\ x = 0;\ x = 1;\ x = -1$	$f'(x)$ не существует, если $x = 0$. $x = -4{,}5$ не является внутренней точкой области определения; $f' = 0;\ x = -3$
4) Определим знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения	
 	
5) Найдем точки экстремума	
$x = -1$ — точка максимума; $x = 0$ — точка минимума; $x = 1$ — точка максимума	$x = -3$ — точка максимума; $x = 0$ — точка минимума
6) Найдем экстремумы функций	
$f_{\min} = f(0) = 0;$ $f_{\max} = f(-1) = 1;$ $f_{\max} = f(1) = 1$	$f_{\max} = f(-3) = 3\sqrt{3};$ $f_{\min} = f(0) = 0$

3.3.4. Точки экстремумов функции

Пример. Пользуясь графиком производной $y = f'(x)$, изображенным на рисунке, укажите точки экстремума.



Решение. $x = -2$ — точка минимума, поскольку знак производной, переходя через точку $x = -2$, меняет «–» на «+».

$x = 0$ — точка максимума, поскольку знак производной, переходя через точку $x = 0$, меняется с «+» на «–».

$x = 2$ — точка минимума, поскольку знак производной, переходя через точку $x = 2$, меняется с «–» на «+».

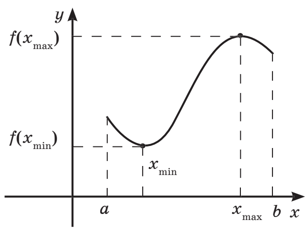
Ответ: $x = -2$, $x = 2$ — точки минимума; $x = 0$ — точка максимума.

3.3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции

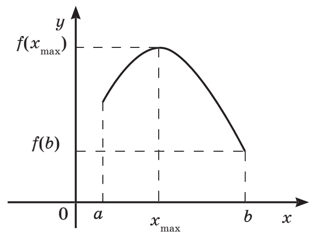
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то среди ее значений на этом отрезке **есть наибольшее и наименьшее значение.**

Наибольшего и наименьшего значений функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

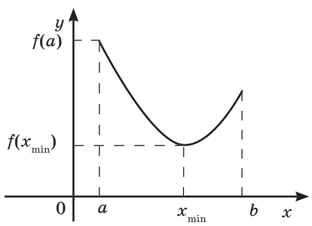
Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.



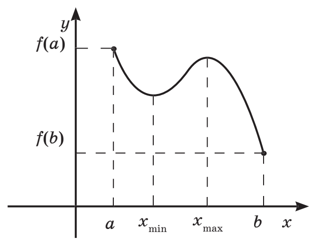
$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{\max})$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{\min})$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{\max})$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{\min})$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$

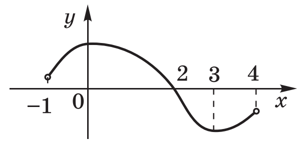
Отсюда вытекает **правило отыскания наименьших и наибольших значений на отрезке,** которое мы рассмотрим на примере.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$ на отрезке [0; 6].

1. Найдем область определения функции $D(y)$	$D(y) = \mathrm{R}$
2. Найдем производную y'	$y' = 3x^2 - 6x - 45 = 3(x^2 - 2x - 15) =$ $= 3(x - 5)(x + 3)$
3. Найдем критические точки (в которых $y'(x) = 0$ или не существует)	y' существует для всех $x \in \mathrm{R}$. $y' = 0$; $3(x - 5)(x + 3) = 0$; $x = 5$; $x = -3$
4. Выберем те, которые принадлежат данному отрезку	$x = 5$ принадлежит отрезку [0; 6]
5. Вычислим значения функции $y = f(x)$ в этих критических точках и на концах отрезка	$y(0) = 225$; $y(5) = 50$; $y(6) = 63$
6. Сравним полученные результаты и выберем среди них наибольший и наименьший, запишем ответ	$\max\limits_{[0;\, 6]} y(x) = y(0) = 225$; $\min\limits_{[0;\, 6]} y(x) = y(5) = 50$.

3.3.6. Точки, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значения и график производной

П р и м е р. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-1; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение. Поскольку производная на промежутке $(-1; 2)$ положительная, то функция на данном промежутке возрастает, а на промежутке $(2; 4)$ производная отрицательная, значит, функция убывает. Наибольшее значение функция принимает в точке $x_0 = 2$.

Ответ: $x_0 = 2$.

3.3.7. Построение графиков функций

Исследование функции и построение графика функции проводят в такой последовательности:

1) найти область определения функции;
2) найти точки пересечения графика с координатными осями;
3) уточнить четность (нечетность), периодичность функции;
4) найти производную и критические точки;
5) найти промежутки возрастания (убывания), точки экстремума и экстремальные значения функции;
6) уяснить поведение функции на концах области определения;
7) построить график.

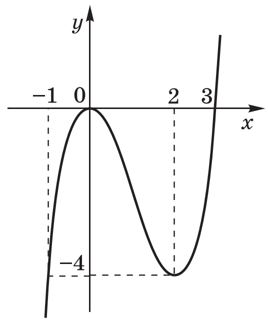
П р и м е р. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Решение.

1. Область определения — R.
2. Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью Ox:
$x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x = 0$; $x = 3$.
Найдем ординату точки пересечения графика с осью Oy:
$y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.
3. Поскольку $f(-x) = (-x)^3 = 3 \cdot (-x)^2 = -x^3 - 3x^2$, то функция общего вида, не периодическая.
4. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
Находим критические точки:
$f'(x) = 0$; $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$; $x = 2$.
5. Находим промежутки монотонности, точки экстремумов и экстремальные значения.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗
		max		min	

6. Построим график функции.



3.3.8. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, нужно найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Пример 1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1; 3]$.

Решение. Находим критические точки функции:

$y' = (x^4 - 8x^2 - 9)' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -2,\ x = 2$ — критические точки. В промежутке $x \in (-1; 3)$ лежат две критические точки: $x = 0$, $x = 2$.

$y(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9$, $y(2) = 24 - 8 \cdot 2^2 - 9 = -25$,

$y(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^2 - 9 = -16$, $y(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 9 = 0$.

Отсюда наименьшее значение функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ достигается в точке $x = 2$ и равно -25, а наибольшее — в точке $x = 3$ и равно 0. Кратко это записывается так:

$\min\limits_{[-1;3]} y = y(2) = -25,\quad \max\limits_{[-1;3]} y = y(3) = 0.$

Ответ: $\min\limits_{[-1;3]} y = y(2) = -25,\quad \max\limits_{[-1;3]} y = y(3) = 0.$

Пример 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2\cos x - \cos 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. $y' = -2\sin x + 2\sin 2x = -2\sin x + 4\sin x\cos x = 2\sin x(-1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = n\pi,\ n \in Z, \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

В промежутке $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ лежит только одна критическая точка $x = \frac{\pi}{3}$. Вычисляем $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

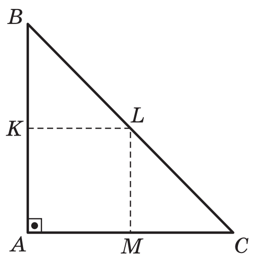
$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2};$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2};$$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0 - (-1) = 1.$

Отсюда наименьшее значение функции достигается в точке $x = \frac{\pi}{2}$, а наибольшее — в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;\ \max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$



П р и м е р 3. Найдите длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами 18; 24; 30 и имеющего с ним общий угол.

Решение. Пусть ΔABC — заданный треугольник, в котором $AC = 18$, $AB = 24$, $BC = 30$, $\angle A = 90°$.

$AKLM$ — вписанный прямоугольник наибольшей площади, имеющий с данным треугольником общий угол A. Пусть $AM = KL = x$, $AK = ML = z$. Тогда $MC = AC - AM = 18 - x$, $BK = AB - AK = 24 - z$.

Из подобия треугольников BKL и BAC получаем:

$$\frac{BK}{KL} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{24 - z}{x} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(24 - z) = 4x \Leftrightarrow z = 24 - \frac{4}{3}x.$$

Площадь прямоугольника $AKLM$

$$S_{AKLM} = AM \cdot AK = x \cdot z = x\left(24 - \frac{4}{3}x\right) = 24x - \frac{4}{3}x^2 = S(x).$$

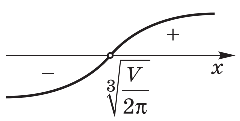
$S'(x) = 24 - \frac{8}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 9$ — точка максимума функции, поскольку при $x < 9$ $S'(x) > 0$, а при $x > 9$ $S'(x) < 0$.

$$S(x) = 24x - \frac{4}{3}x^2;\ AM = KL = x = 9,\ AK = ML = z = 24 - \frac{4}{3}x = 24 - \frac{4}{3}\cdot 9 = 12.$$

Таким образом, стороны прямоугольника наибольшей площади $x = 9$, $z = 12$.

Ответ: $x = 9$, $z = 12$.

П р и м е р 4. Найдите высоту цилиндра заданного объема V, который имеет наименьшую полную поверхность.



«+», «–» — знаки $S(x)$

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x. Полная поверхность цилиндра $S = 2\pi xH + 2\pi x^2$, где H — высота цилиндра.

$$V = \pi x^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Подставляя это значение H в формулу для полной поверхности S, получаем:

$$S = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2 = S(x).$$

$$S'(x) = 2V\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\pi 2x = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Поскольку при переходе через точку $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ производная $S'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ — точка минимума.

Высота цилиндра $H = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{V^3\cdot 4\pi^2}{\pi^3\cdot V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$

Ответ: $H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.3.
«Исследование функции с помощью производной»

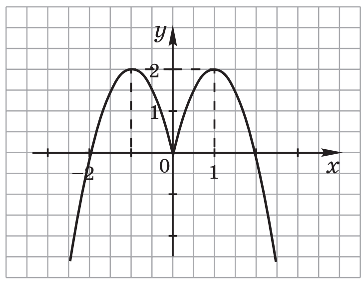
Часть 1

Ответом на задания В1–В18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

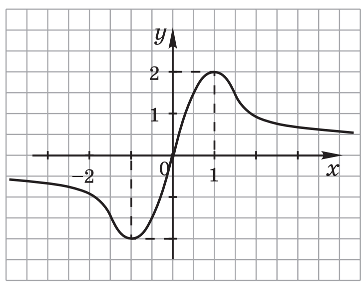
В1. Сколько критических точек имеет функция $y = x^3 - 3x^2 + 5$?

В2. Найдите сумму критических точек функции $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 19$.

В3. Найдите точку минимума функции, график которой изображен на рисунке.



В4. Найдите локальный максимум функции, график которой изображен на рисунке.



В5. Определите стационарные точки функции $y = e^{2x} - 2e^x$.

В6. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на промежутке $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

B7. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2$, где $x \in [0; 3]$.

B7

B8. Сколько точек экстремумов имеет функция $f(x) = x^3 - 3x$?

B8

B9. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 6x^2$.

B9

B10. Найдите точку максимума функции $y = 2x^3 - 3x^2$.

B10

B11. Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{36}{x}$, где $x \in (0; 10)$.

B11

B12. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$ на промежутке $[-1; 1]$.

B12

B13. Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 = a$, если $a \in (-4; 0)$?

B13

B14. Найдите минимум функции $y = x^4 - 4x^3$.

B14

B15. Найдите максимум функции $y = 2 \ln x - x^2$.

B15

B16. Найдите локальный максимум функции $y = 3x - x^3$.

B16

B17. Найдите минимум функции $y = x^4 - 4x^2$.

B17

B18. На параболе $y = x^2$ найдите точку $A(x_0; y_0)$, расстояние от которой до точки $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$ является наименьшим. В ответ запишите $x_0 + y_0$.

B18

3.4. Первообразная

Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X, если для всех x из X выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$, где C — произвольное действительное число (основное свойство первообразной).

Функция $y = f(x)$	**Первообразная $y = F(x)$**
0	C
1	$x + C$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$ $(x > 0)$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**, а операция нахождения первообразной — **интегрированием**.

Интегрирование — операция, обратная дифференцированию.

Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке x первообразную $y = F(x)$, то множество всех первообразных, т. е. множество функций вида $F(x) + C$, называют неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$. Пользуясь таблицей первообразных, можно составить таблицу основных неопределенных интегралов.

$$\int 0dx = C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int dx = x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Пример 1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = x^6$ на множестве R.

Решение. Одной из первообразных функции f является $\frac{x^7}{7}$, так как $\left(\frac{x^7}{7}\right)' = \frac{1}{7}x^6 \cdot 7 = x^6$. Теперь в силу основного свойства первообразной получаем общий вид первообразных функции f: $F(x) = \frac{x^7}{7} + C$.

Ответ: $\frac{x^7}{7} + C$.

Пример 2. Для функции $f(x) = x^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M = (1; -1)$.

Решение. Найдем общий вид первообразных для функции f: $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$.

Так как $F(1) = -1$, то $-1 = \frac{1^4}{4} + C$, откуда $-4 = 1 + 4C$; $4C = -5$; $C = -\frac{5}{4}$; $C = -1\frac{1}{4}$. Следовательно, искомая первообразная $F(x) = \frac{x^4}{4} - 1\frac{1}{4}$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^4}{4} - 1\frac{1}{4}$.

Пример 3. Найдите функцию f, если известен общий вид первообразных $F(x) = 3x^2 + C$.
Решение. Если $F(x) = 3x^2 + C$, то $f(x) = F'(x) = (3x^2 + C)' = 3 \cdot 2x + 0 = 6x$.
Ответ: $f(x) = 6x$.

3.4.1. Первообразная суммы функций

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Если F — первообразная для f, а H — первообразная для h	$\Rightarrow$	$F + H$ — первообразная для $f + h$

Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Пример. Найдите первообразные для функции: $f(x) = x + \cos x$.

Решение. Поскольку для x одной из первообразных является $\frac{x^2}{2}$, а для $\cos x$ одной из первообразных является $\sin x$, то одной из первообразных для функции $x + \cos x$ есть функция $\frac{x^2}{2} + \sin x$, следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

3.4.2. Первообразная произведения функции на число

Если F — первообразная для f	$\Rightarrow$	$\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$; k и $b = \text{const}$, $k \neq 0$

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Пример 1. Найдите первообразные для функции

$f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Решение. Поскольку одной из первообразных для функции e^x является функция e^x, то одной из первообразных для функции $5e^x$ является $5e^x$; поскольку одной из первообразных для функции $\sin x$ является $-\cos x$, то одной из первообразных для функции $7\sin x$ является $-7\cos x$; первообразной для функции $3x^2$ является $3\cdot\frac{x^3}{3} = x^3$. Следовательно, $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$.

Ответ: $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$.

Пример 2. Найдите: $\int(1+3e^x-4\cos x)dx$.

Решение. $\int(1+3e^x-4\cos x)dx = \int 1dx + 3\int e^x dx -$

$-4\int\cos x dx = x + 3e^x - 4\sin x + C$.

Ответ: $x + 3e^x - 4\sin x + C$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+m)dx = \frac{F(kx+m)}{k} + C$.

Пример 3. Найдите первообразные для функций:

а) $f(x) = (7 - 3x)^5$; б) $f(x) = e^{2x-1}$.

Решение.

а) Поскольку первообразной для функции x^5 является функция $\frac{x^6}{6}$, то искомые первообразные равны: $F(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(7-3x)^6}{6} + C = -\frac{(7-3x)^6}{18} + C$.

б) Поскольку одной из первообразных для функции e^x является e^x, то имеем:

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

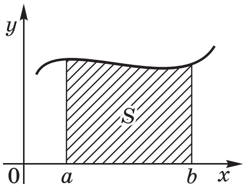
Ответ: а) $F(x) = -\frac{(7-3x)^6}{18} + C$; б) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

3.4.3. Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$, определенная на промежутке $[a; b]$, тогда **определенным интегралом** от a до b функции $f(x)$ называется приращение первообразной $F(x)$ этой функции, т. е. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (формула Ньютона—Лейбница).

Числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

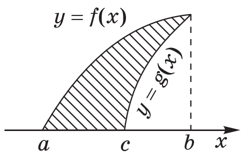
Геометрический смысл определенного интеграла



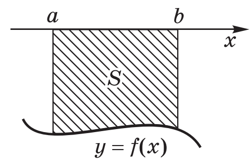
Площадь S криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;\ b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$), вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

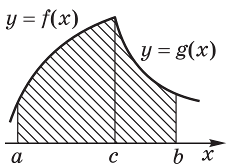
Вычисление площадей фигур



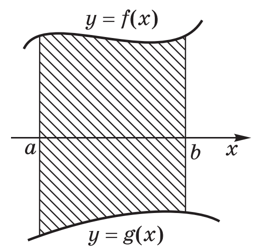
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx$$



$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

П р и м е р 1. Вычислите: а) $\int_{-1}^{2} x^2dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8x - \sin x)dx$.

Решение.

а) $\int_{-1}^{2} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3;$

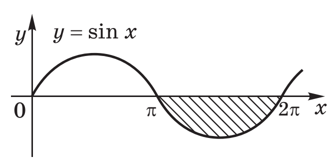
б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8x - \sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = 8 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \left.4x^2\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi^2}{4} - 0\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \pi^2 - 1.$

Ответ: а) 3; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\pi^2 - 1$.

П р и м е р 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $y = 0$, $\pi \le x \le 2\pi$.

Решение.



Построим фигуру, площадь которой необходимо вычислить. Тогда

$S = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin xdx = \left.\cos x\right|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos \pi = 2.$

Ответ: 2.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.4. «Первообразная»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1. Для функции $f(x) = \sin x$ найдите ее первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A(\pi;\ 2)$. В ответ запишите $F(\pi)$.

B2. Для функции $f(x) = 3x^2$ найдите ее первообразную, график которой проходит через точку $A(0;\ 1)$. В ответ запишите значение найденной первообразной, если $x = 1$.

B3. Вычислите $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx$.

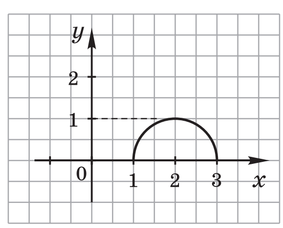
B4. Вычислите $\int\limits_{-2}^{1} x^4 dx$.

B5. Вычислите $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx$.

B6. Вычислите $\int\limits_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2} dx$.

B7. Вычислите $\int\limits_{1}^{4} x\sqrt{x} dx$.

B8. Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{1-(x-2)^2}$, найдите $\frac{2}{\pi}\int\limits_{1}^{3}\sqrt{1-(x-2)^2}dx$.



B9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $\pi \le x \le 2\pi$.

B10. Вычислите объем (V) тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$. В ответ запишите $\dfrac{V}{\pi}$.

B10

B11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 4x$ и $y = 4 + x$.

B11

B12. Вычислите $\int\limits_1^2 \left(3x^2 - 4x - \dfrac{2}{x^2}\right)dx$.

B12

B13. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 1$ (м/с). Найдите путь (в м), пройденный телом за промежуток времени от $t = 0$ с до $t = 4$ с.

B13

B14. Вычислите $\int\limits_1^4 \left(\dfrac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right)dx$.

B14

B15. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 + x^2$ и $y = 4 + x$.

B15

B16. Вычислите $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$.

B16

B17. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$, $6 - y = 0$, $x = 0$.

B17

B18. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$ и $y = 3x - x^2$.

B18

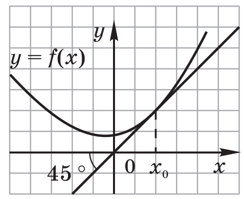
Тренировочные тестовые задания к разделу 3 «Функции»

Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

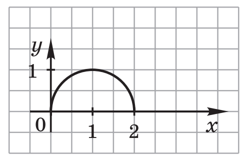
B1

B1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите $f'(x_0)$.



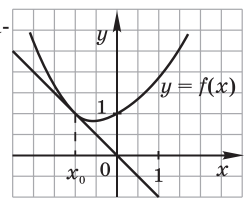
B2

B2. На рисунке изображен график функции $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$. Найдите $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$.



B3

B3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите $f'(x_0)$.



B4

B4. Найдите значение производной функции $f(x) = x\cos x$ при заданном значении аргумента $x_0 = \pi$.

B5

B5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x$, $y = 3 - 2x - x^2$.

B6

B6. Найдите угол наклона (в градусах) к оси Ox касательной, проведенной к кривой $y = x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

B7

B7. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \dfrac{4}{x}$ на промежутке $[1; 3]$.

B8. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = t^3 + t$ (в м/с). Найдите путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = 1$ с до $t = 2$ с.

B8

B9. Найдите наибольшее целое значение x, которое принадлежит области определения функции $y = \arcsin\dfrac{x-5}{6} - \lg(x^2 - 10x + 24)$.

B9

B10. Найдите точку максимума функции $y = |4 - x^2|$.

B10

B11. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \dfrac{1-x}{|x+3|}$ с осью Ox.

B11

B12. Найдите значение производной $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ при заданном значении аргумента $x_0 = -1$.

B12

Часть 2

При выполнении заданий С1–С6 требуется привести полное обоснованное решение и ответ.

С1. Найдите множество значений функции $y = \log_{0,5}(\sin x + 5)$.

С2. Исследуйте на четность (нечетность) функцию $y = |x - 2| + |x + 2|$.

С3. При каких значениях параметра a функция $y = x^2 + (a - 2)x + 0,25$ не принимает отрицательных значений?

С4. Найдите острый угол между касательными, проведенными к кривым $y = \dfrac{18}{\sqrt{x}}$ и $y = \dfrac{12}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$ в точке их пересечения.

С5. При каком значении параметра a минимальное значение функции $y = x^2 - 4ax - a^4$ наибольшее?

С6. На параболе $y = x^2$ найдите точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

Раздел 4

Числа и выражения

4.1. Проценты

Для дроби $\frac{1}{100}$ ввели специальное обозначение: 1% (читают: «один процент»).

Пишут: $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$, т. е. 1% — это одна сотая.

Тогда: 2% = 0,02; 27% = 0,27; 50% = 0,5; 100% = 1; 140% = 1,4.

Чтобы перевести проценты в дробь, нужно число процентов разделить на 100.
Чтобы дробь записать в виде процентов, нужно эту дробь умножить на 100%.

Например:

1) $25\% = 25 : 100 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25;$

2) $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 100\% = \frac{3 \cdot 25100\%}{4} = 75\%.$

4.1.1. Основные задачи на проценты

К основным задачам на проценты относятся такие:

- нахождение процентов от числа;
- нахождение числа по его процентам;
- нахождение процентного соотношения.

Задача 1. Нахождение процентов от числа

Существуют следующие способы решения таких задач.

1 способ

1) найти величину 1%;
2) полученное значение умножить на число процентов.

Пример 1. Найдите 12% от 60.

Решение.

1) 60 : 100 = 0,6 — величина 1%.
2) 0,6 · 12 = 7,2.

Ответ: 12% от 60 составляют 7,2.

2 способ
1) перевести проценты в дробь;
2) полученную дробь умножить на данное число.

Пример 2. Площадь поля равна 270 га. Пшеницей засеяли 18% поля. Сколько гектаров засеяли пшеницей?

Решение.

1) $18\% = \frac{18}{100} = 0,18;$

2) $0,18 \cdot 270 = 48,6$ (га).

Ответ: пшеницей засеяли 48,6 га поля.

3 способ. Составить пропорцию по условию задачи и решить ее.

Пример 3. Рассмотрим предыдущую задачу.

Решение.

Так как 270 га поля составляет 100%, а x га составляет 18%,

то имеем пропорцию $\frac{270}{x} = \frac{100}{18}$, откуда $x = \frac{270 \cdot 18}{100} = 48,6$ (га).

Ответ: 48,6 га.

Задача 2. Нахождение числа по значению его процентов

Существуют следующие способы решения таких задач.

1 способ
1) разделить значение процентов на число процентов, т. е. найти величину 1%;
2) полученный результат умножить на 100.

Пример 1. Найдите число, если 18% от этого числа составляют 54.

Решение.
1) $54 : 18 = 3$ — величина 1%.
2) $3 \cdot 100 = 300$.

Ответ: искомое число равняется 300.

2 способ
1) перевести проценты в дробь;
2) значение процентов разделить на эту дробь.

Пример 2. Чему равно расстояние между двумя городами, если 48 км составляют 24% от этого расстояния?

Решение.
1) $24\% = 0,24$;
2) $48 : 0,24 = 200$ (км)

Ответ: расстояние между городами равно 200 км.

2 способ. Составить пропорцию по условию задачи и решить ее.

Задача 3. Процентное соотношение двух чисел

Процентное соотношение двух чисел — это их отношение, выраженное в процентах. Оно показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

Существуют следующие способы решения таких задач.

1 способ

Чтобы найти процентное соотношение двух чисел, надо их отношение умножить на 100 и к результату дописать знак процента.

П р и м е р 1. Сколько процентов составляет число 64 от числа 400?

Решение.

$\frac{64}{400}\cdot 100\% = 16\%$.

Ответ: 16%.

2 способ

Составить пропорцию по условию задачи и решить ее.

П р и м е р 2. Найдите процент содержания меди в сплаве, если 300 т этого сплава содержат 45 т меди.

Решение.

Пусть 300 т сплава составляет 100%, тогда 45 т меди составляет $x\ \%$.

Имеем пропорцию $\frac{300}{45} = \frac{100}{x}$, откуда $x = \frac{45\cdot 100}{300} = 15(\%)$.

Ответ: 15% меди содержится в данном сплаве.

4.2. Пропорции

Равенство двух отношений называют пропорцией.

В буквенном виде пропорцию можно записать так:

$$a : b = c : d \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Читают: «a относится к b как c относится к d» или «отношение a к b равно отношению c к d».

Числа a и d называют крайними членами пропорции, а числа b и c — средними членами пропорции.

Например, 3,5 : 0,7 = 2,5 : 0,5 — пропорция.

$\frac{16}{12} = \frac{68}{51}$ — пропорция.

4.2.1. Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:

$$\textbf{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \textbf{ то } ad = bc.$$

Верно и обратное утверждение: если a, b, c и d — числа, отличные от нуля, и $ad = bc$, то отношение $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны и могут образовывать пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Приведенное свойство дает возможность устанавливать равенство двух отношений, не находя их значений.

Например, чтобы установить, образуют ли отношения 1,6 : 3,6 и 0,5 : 1,125 пропорцию, достаточно проверить, равны ли произведения 1,6 · 1,125 и 3,6 · 0,5. Получаем: 1,6 · 1,125 = 1,8, 3,6 · 0,5 = 1,8. Составим пропорцию: 1,6 : 3,6 = 0,5 : 1,125.

Следует отметить, что из равенства $ad = bc$ можно составить и такие пропорции: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

П р и м е р 1 . Найдите неизвестный член пропорции: 4,5 : 0,6 = x : 2,4.

Решение.

Используя основное свойство пропорции, получаем: 0,6 · x = 4,5 · 2,4;

$x = \frac{4,5 \cdot 2,4}{0,6} = 18.$

Ответ: 18.

П р и м е р 2 . Для изготовления 8 приборов необходимо 18 кг металла. Сколько приборов можно изготовить из 27 кг металла?

Решение.

Так какиз 18 кг металла можно изготовить 8 приборов, то из 27 кг металла можно изготовить x приборов. Имеем пропорцию $\frac{18}{27} = \frac{8}{x}$, отсюда $x = \frac{27 \cdot 8}{18} = 12$ (приб.).

Ответ: из 27 кг металла можно изготовить 12 приборов.

П р и м е р 3 . Сплав содержит 12% цинка. Сколько килограммов цинка содержится в 80 кг сплава?

Решение.

Пусть в 80 кг сплава содержится x кг цинка. Примем массу сплава за 100% и запишем кратко условие:

80 кг сплава — 100%

x кг цинка — 12%.

Составим пропорцию: $\frac{x}{12} = \frac{80}{100}$.

$x = \frac{12 \cdot 80}{100} = 9,6$ (кг).

Ответ: в 80 кг сплава содержится 9,6 кг цинка.

4.2.2. Прямо пропорциональные величины

Две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении (или уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (или уменьшается) во столько же раз.

Например: сторона квадрата и периметр квадрата — прямо пропорциональные величины; путь и время при постоянной скорости движения — прямо пропорциональные величины.

Свойство прямо пропорциональных величин

Если две величины прямо пропорциональны, то отношение соответствующих значений этих величин равно одному и тому же числу.

Вообще, если величины y и x прямо пропорциональны, то соответствующие им значения удовлетворяют равенству $\frac{y}{x} = k$, где k — некоторое постоянное для данных величин число ($k \neq 0$).

П р и м е р . За некоторое время поезд прошел 360 км. Какое расстояние пройдет поезд за это же время, если его скорость уменьшится в 4 раза?

Решение.

Путь и скорость при постоянном времени являются прямо пропорциональными величинами. Поэтому если скорость уменьшилась в 4 раза, то и путь уменьшился в 4 раза.

360 : 4 = 90 (км).

Ответ: 90 км.

4.2.3. Обратно пропорциональные величины

Две величины, произведение соответствующих значений которых является постоянным, называются обратно пропорциональными.

Например, если путь не изменяется, то скорость обратно пропорциональна времени.

Свойство обратно пропорциональных величин

Если две величины обратно пропорциональны, то при увеличении (уменьшении) первой величины в несколько раз, во столько же раз уменьшается (увеличивается) вторая величина. При этом отношение значений первой величины равно обратному отношению соответствующих значений второй величины.

Пример. Для перевозки груза требуется 20 самосвалов грузоподъемностью 2,8 т. Сколько потребуется самосвалов грузоподъемностью 3,5 т, чтобы перевезти этот груз?

Решение.

1 способ. Пусть для перевозки груза требуется x самосвалов грузоподъемностью 3,5 т. Тогда:

20 самосвалов — 2,8 т

x самосвалов — 3,5 т.

Количество самосвалов и грузоподъемность одного самосвала — обратно пропорциональные величины (их произведение равно массе всего груза и является постоянным). Поэтому:

$$\frac{20}{x} = \frac{3,5}{2,8},$$

$$x = \frac{20 \cdot 2,8}{3,5} = 16 \text{ (самосвалов).}$$

Ответ: 16 самосвалов.

2 способ. Так как величины в задачах обратно пропорциональные, то при увеличении одной величины (грузоподъемности самосвала) в несколько раз, другая величина (количество самосвалов) уменьшится во столько же раз. Поэтому:

1) 3,5 : 2,8 = 1,25 (раз) — увеличилась грузоподъемность самосвала.

2) 20 : 1,25 = 16 (самосвалов).

Ответ: 16 самосвалов.

4.3. Решение текстовых задач

4.3.1. Задачи на движение

При решение таких задач используется формула:

$$S = v \cdot t,$$

где v — скорость движения, t — время, S — расстояние, пройденное за время t со скоростью v.

Отсюда

$$v = \frac{S}{t}, \quad t = \frac{S}{v}.$$

Также в задачах на равномерное движение иногда встречается условие, состоящее в том, что либо два тела движутся навстречу друг другу, либо одно тело догоняет другое. Если при этом начальное расстояние между телами равно S, а скорости тел равны v_1 и v_2, то:

1) при движении тел одновременно навстречу друг другу время, через которое они встретятся, равно $\dfrac{S}{v_1 + v_2}$;

2) при движении тел в одну сторону ($v_1 > v_2$) время, через которое первое тело догонит второе, равно $\dfrac{S}{v_1 - v_2}$.

Пример. Первые 20 км пути велосипедист двигался со скоростью на 5 км/ч большей, чем скорость, с которой он преодолел последние 20 км. С какой скоростью проехал велосипедист вторую половину пути, если на весь путь он потратил 3 ч 20 мин?

Решение. Пусть вторую половину пути велосипедист ехал со скоростью x км/ч. Тогда на первой половине пути его скорость была $(x + 5)$ км/ч. На первую половину пути он потратил $\dfrac{20}{x+5}$ ч, а на вторую — $\dfrac{20}{x}$ ч, что вместе составило 3 ч 20 мин $= 3\dfrac{1}{3}$ ч $= \dfrac{10}{3}$ ч.

Составим уравнение:

$$\frac{20}{x+5} + \frac{20}{x} = \frac{10}{3};$$

$$\begin{cases} 3(2x + 2x + 10) = x^2 + 5x, \\ x \neq 0; x \neq -5; \end{cases}$$

$x^2 - 7x - 30 = 0$;

$x_1 = 10$, $x_2 = -3$;

$x_2 = -3$ — не удовлетворяет условию задачи.

Значит, искомая скорость равна 10 км/ч.

Ответ: 10 км/ч.

Движение по реке

$v_л$ — скорость лодки (собственная),

$v_р$ — скорость течения реки.

Тогда скорость лодки по течению: $v_{по} = v_л + v_р$, а скорость лодки против течения: $v_{пр} = v_л - v_р$.

Пример. Турист проплыл на моторной лодке 25 км против течения реки и вернулся назад на плоту. Найдите скорость течения реки, если на плоту турист плыл на 10 ч больше, чем на лодке, а собственная скорость лодки составляет 12 км/ч.

Решение.

Пусть скорость течения x км/ч. Тогда скорость лодки против течения равна $(12 - x)$ км/ч $\Rightarrow$ $\Rightarrow x < 12$. На плоту турист плыл $\dfrac{25}{x}$ ч, а на лодке — $\dfrac{25}{12-x}$ ч. По условию разность между этими значениями равна 10 ч. Составим уравнение:

$$\frac{25}{x} - \frac{25}{12-x} = 10; \quad \frac{5}{x} - \frac{5}{12-x} = 2;$$

$$\begin{cases} 60 - 5x - 5x = 24x - 2x^2; \\ x \neq 0,\ x \neq 12; \end{cases}$$

$x^2 - 17x + 30 = 0;$

$x_1 = 15,\ x_2 = 2.$

Корень $x = 15$ не удовлетворяет условию задачи, так как лодка не смогла бы плыть против течения.

Ответ: 2 км/ч.

4.3.2. Задачи на работу

Обычно в задачах на работу содержатся следующие величины: время t, в течение которого производится работа, производительность N — работа, произведенная в единицу времени, и собственно работа A, произведенная за время t.

Уравнение, связывающее эти три величины, имеет вид:

$$A = N \cdot t.$$

К задачам на работу можно с очевидными изменениями отнести часто встречающиеся задачи на перекачивание жидкости насосами. В качестве произведенной работы в этом случае удобно рассматривать объем перекаченной воды.

П р и м е р 1 . Одному рабочему для выполнения задания необходимо на 4 ч меньше, чем второму. Первый рабочий проработал 4 ч, а потом его сменил второй. После того, как второй рабочий проработал 4 ч, оказалось, что выполнено $\frac{5}{6}$ задания. За сколько часов может выполнить это задание каждый рабочий самостоятельно?

Решение.

Примем задание за 1. Пусть первому рабочему для выполнения задачи понадобится x ч, тогда второму надо $(x + 4)$ ч. За 1 час первый выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а второй — $\frac{1}{x+4}$ часть. Первый рабочий за 4 ч выполнил $\frac{4}{x}$ часть задания, а второй — $\frac{4}{x+4}$ часть.

Тогда имеем: $\frac{4}{x} + \frac{4}{x+4} = \frac{5}{6};$

$$\frac{4x+16+4x}{x(x+4)} = \frac{5}{6};$$

$$\begin{cases} 6(8x+16) = 5x(x+4), \\ x \neq 0; x \neq -4; \end{cases}$$

$5x^2 - 28x - 96 = 0;$

$x_1 = 8,\ x_2 = -2{,}4.$

Корень уравнения $x_2 = -2{,}4$ не удовлетворяет смыслу задачи.

Значит, первый рабочий выполнит задание за 8 ч, а второй — за $8 + 4 = 12$ (ч).

Ответ: 8 ч и 12 ч.

П р и м е р 2 . Бассейн наполняют водой с помощью двух труб. Когда первая труба проработала 7 ч, включили вторую трубу. Вместе они проработали 2 ч и заполнили бассейн. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба, работая отдельно, если первой требуется для этого на 4 ч больше, чем второй?

Решение.

Примем объем бассейна за 1. Пусть вторая труба может наполнить бассейн за x ч, тогда первая — за $(x + 4)$ ч. Первая труба за 1 ч наполняет $\frac{1}{x+4}$ часть бассейна, а вторая — $\frac{1}{x}$ часть. Первая труба была открыта 9 ч и наполнила за это время $\frac{9}{x+4}$ часть бассейна, а вторая за 2 ч наполнила $\frac{2}{x}$ часть бассейна.

Составим уравнение:

$$\frac{9}{x+4}+\frac{2}{x}=1;$$

$$\begin{cases}9x+2x+8=x^2+4x,\\ x\neq 0; x\neq -4;\end{cases} \quad x^2-7x-8=0;$$

$x_1 = 8$, $x_2 = -1$.

$x_2 = -1$ не удовлетворяет условию задачи.

Значит, вторая труба наполнит бассейн за 8 ч, а первая — за $8 + 4 = 12$ (ч).

Ответ: 12 ч и 8 ч.

4.3.3. Задачи на сложные проценты

В более сложных прикладных задачах на проценты часто речь идет об увеличении или уменьшении величины на несколько процентов. В таких случаях нужно определить, от какого числа находят проценты. Например, если говорят, что заработная плата увеличилась на 10%, то понимают, что она увеличилась на 10% от предыдущей заработной платы. При этом, если значение a больше b на $p\%$, то значение b меньше a не на $p\%$. Увеличению в 2 раза соответствует увеличение на 100%, а уменьшению в 2 раза — уменьшение на 50%.

Цена товара теоретически может увеличиваться на сколько угодно процентов, а уменьшаться, например, на 130%, не может.

Часто приходится решать задачи на проценты бухгалтерам и работникам банков.

Для решения таких задач используется формула сложных процентов:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

где A_0 — начальный капитал, $p\%$ — процент годовых, n — годы, на которые положен вклад, A_n — наращенный капитал за n лет.

Пример 1. Пусть вкладчик отдает сбербанку под 5% годовых 2000 евро. Это — начальный капитал ($A_0 = 2000$ евро). Через год банк насчитает вкладчику за это 100 евро процентных денег (5% от 2000 евро). После этого на счету вкладчика будет 2100 евро, поскольку $2000(1 + 0{,}05) = 2100$. За второй год процентных денег ему насчитают уже 5% от 2100 евро; наращенный капитал вкладчика после двух лет будет равен $2000(1 + 0{,}05)^2$ евро. Очевидно, что через n лет наращенный капитал будет равен $2000(1 + 0{,}05)^n$ евро.

Ответ: $2000(1 + 0{,}05)^n$ евро.

Подобные понятию процента — промилле и проба.

Промилле — это тысячная доля ($1\% = 0{,}001$).

Например, пятипромилльный раствор соли — это раствор, в 1000 г которого содержится 5 г соли.

Пробами характеризуются сплавы драгоценных металлов. Так, золото 875-й пробы — это сплав, в 1000 г которого содержится 875 г чистого золота.

П р и м е р 2. Вкладчик положил в банк 1000 руб. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а на второй год банковский процент увеличили на 2%. В конце второго года на счете было 1188 руб. Сколько процентов составляла банковская ставка за первый год?

Решение.

Пусть величина процентной ставки за первый год равна $p\%$. Тогда сумма вклада на конец первого года составила $1000\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб.

Из условия задачи следует, что во второй год процентная ставка составляла $(p + 2)\%$. Поэтому сумма вклада на конец второго года составила:

$$1000\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p+2}{100}\right)=1188;$$

$$1000\cdot\frac{100+p}{100}\cdot\frac{102+p}{100}=1188;$$

$(100 + p)(102 + p) = 11880$; $p^2 + 202p - 1680 = 0$, $p_1 = 8$, $p_2 = -210$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: в первый год банковская ставка составляла 8%.

4.3.4. Задачи на десятичную форму записи числа

В науке и технике имеют дело как с очень большими, так и с очень малыми положительными числами. Их удобно записывать в стандартном виде.

Стандартным видом числа x называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и n — целое число.

Число n называют порядком числа x.

Например, порядок числа $3{,}8 \cdot 10^{21}$ равен 21, а порядок числа $2{,}2 \cdot 10^{-18}$ равен -18.

В стандартном виде можно записать любое положительное число.

Например,

1) $456{,}9 = 4{,}569 \cdot 10^2$;

2) $0{,}000124 = 1{,}24 \cdot 10^{-4}$

П р и м е р 1. Выполните умножение и запишите результат в стандартном виде:

$(7{,}3 \cdot 10^4) \cdot (1{,}7 \cdot 10^{-8}) = (7{,}3 \cdot 1{,}7) \cdot (10^4 \cdot 10^{-8}) = 12{,}41 \cdot 10^{-4} = 1{,}241 \cdot 10^{-3}$.

П р и м е р 2. Выполните деление и запишите результат в стандартном виде:

$$\left(3{,}7\cdot10^6\right):\left(7{,}4\cdot10^{-4}\right)=\frac{3{,}7\cdot10^6}{7{,}4\cdot10^{-4}}=\frac{3{,}7}{7{,}4}\cdot\frac{10^6}{10^{-4}}=0{,}5\cdot10^{10}=0{,}5\cdot10\cdot10^9=5\cdot10^9.$$

4.3.5. Задачи на концентрацию смеси и сплавы

Процентными содержаниями веществ A, B, C в данной смеси называются величины $p_A\%$, $p_B\%$, $p_C\%$, соответственно, вычисляемые по формулам:

$$p_A\% = C_A \cdot 100\%,\ p_B\% = C_B \cdot 100\%,\ p_C\% = C_C \cdot 100\%,$$

где C_A, C_B, C_C — масса соответствующих веществ.

П р и м е р. Сколько граммов 4-процентного и сколько граммов 10-процентного растворов соли нужно взять, чтобы получить 180 г 6-процентного раствора?

Решение.
Составим таблицу по условию задачи:

	4% раствор	**10% раствор**	**6% раствор**
масса раствора	x г	y г	180 г
масса соли в растворе	$0{,}04x$ г	$0{,}1y$ г	$180 \cdot 0{,}06 = 10{,}8$ (г)

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 180, \\ 0,04x + 0,1y = 10,8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 180, \\ 2x + 5y = 540; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 360, \\ 2x + 5y = 540; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 180, \\ x + y = 180; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 60, \\ x = 120. \end{cases}$$

Ответ: нужно взять 120 г 4-процентного раствора и 60 г 10-процентного раствора.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.1. «Проценты»

Часть 1

Ответом на задания B1–B36 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1. Выразите в процентах число 0,125.

B2. Выразите в виде дроби 2,45 %.

B3. Из молока получают 10 % творога. Сколько творога (в кг) получат из 40 кг молока?

B4. Определите процент соли в растворе, если в 300 г раствора содержится 15 г соли.

B5. Из 30 учащихся класса 6 — отличники. Какой процент всех учащихся составляют отличники?

B6. Сколько сухой ромашки можно получить из 25 кг свежей, если она при сушке теряет 84 % своей массы?

B7. Найдите x, если $13\ \% \cdot x = 65$.

B8. На заводе 40 % всех станков перевели на повышенные скорости, в результате чего производительность труда возросла на 30 %. На сколько процентов увеличится производство продукции на заводе?

B9. Вкладчик положил в банк некоторую сумму денег под 3% годовых. Через год его вклад составил 5768 руб. Какую сумму денег вкладчик положил в банк?

В10. На сколько процентов уменьшится число, если его сначала уменьшить на 30 %, а затем увеличить на столько же процентов?

В10

В11. На сколько процентов увеличится цена автомобиля, если она сначала возросла на 20%, а потом уменьшилась на 10%?

В11

В12. Сколько воды следует долить до 7,5 кг 12 %-ного раствора, чтобы получить 10 %-ный раствор?

В12

В13. Производительность труда рабочего повысилась на 25 %. На сколько процентов уменьшится время, необходимое рабочему для выполнения одной и той же работы?

В13

В14. Массу гуся на 25 % больше массы утки. На сколько процентов масса утки меньше массы гуся?

В14

В15. Свежие грибы содержат по весу 90 % воды, а сухие — 20 %. Сколько свежих грибов (в кг) нужно собрать, чтобы получить из них 8 кг сухих?

В15

В16. Свежие грибы содержат по весу 90 % воды, а сухие — 20 %. Сколько сухих грибов (в кг) можно получить из 40 кг свежих?

В16

В17. Сбербанк ежегодно выплачивает по срочному вкладу 3 % суммы вклада. Какой станет сумма вклада (в рублях) через два года, если первоначальный вклад составляет 2000 р.?

В17

В18. Сколько граммов 3 %-ного раствора соли следует долить до 8 %-ного раствора, чтобы получить 260 г 5 %-ного раствора?

В18

Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.2. «Пропорции»

Часть 1

Ответом на задания В1–В36 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Сколько раз $1\frac{2}{15}i$ содержится в $6\frac{4}{5}i$?

B2

B2. Какую часть $1\frac{1}{9}t$ составляет от $\frac{2}{3}t$?

B3

B3. Найдите неизвестный член пропорции $x : 9 = 2 : 3$.

B4

B4. Найдите неизвестный член пропорции $10 : x = 5 : 2$.

B5

B5. Во сколько раз километр больше, чем миллиметр?

B6

B6. Сколько суток составляют 72 миллиона минут?

B7

B7. Сколько лет составляет 1 095 000 часов? (считать, что в году 365 суток).

B8

B8. Скорость поезда 24 м/с. Запишите эту скорость в километрах в час.

B9

B9. Скорость улитки $\frac{1}{12}$ м/мин. Запишите эту скорость в километрах в час.

B10

B10. Скорость теплохода относится к скорости течения реки как 36 : 5. Теплоход движется по течению 5 ч 10 мин. Сколько времени (в часах) нужно ему, чтобы проплыть по течению и вернуться назад?

B11

B11. На карте, масштаб которой 1 : 600 000, расстояние между Москвой и Тулой равно 18 см. Определите реальное расстояние.

B12. Длина минутной стрелки часов равна 2 см, длина часовой стрелки — 1,5 см. Во сколько раз скорость конца минутной стрелки больше скорости часовой стрелки?

B12

B13. Одна бригада может выполнить задание за 12 ч, другая бригада — в 1,5 раза быстрее. Производительность третьей бригады такая же, как и второй. За сколько времени могут выполнить данное задание три бригады, работая вместе?

B13

B14. Для покраски 7,5 $м^2$ пола было израсходовано 1,5 кг краски. Сколько килограммов краски нужно для покраски пола размером 4,5 м $\times$ 8,6 м?

B14

B15. Четыре наборщицы, разделив между собой рукопись, могут набрать ее на компьютере за $8\frac{1}{3}$ часа. Сколько наборщиц должны работать, чтобы эта рукопись была набрана на 1 ч 40 мин быстрее?

B15

B16. Сплав из серебра и меди весит 2 кг, причем вес серебра составляет $14\frac{2}{7}$ % веса меди. Сколько килограммов серебра в данном сплаве?

B16

B17. Фермер заготовил сено для 32 коров на 7,5 месяцев, но позже несколько коров продал, и поэтому при той же норме сена на одну корову его запасов хватило на 8 месяцев. Сколько коров было продано?

B17

B18. Из 5 л сливок получается 15 кг мороженого. Сколько литров сливок нужно взять для приготовления 55 порций мороженого по 150 г каждая?

B18

Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.3.
«Решение тектовых задач»

Часть 1

Ответом на задания В1–В36 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

В1. Один арбуз на 2 кг легче, чем другой, и в 5 раз легче, чем третий. Первый и третий арбузы вместе в 4 раза тяжелее, чем второй. Найдите массу наименьшего арбуза.

В2. На ферме 1000 кроликов и кур. У них 3150 ног. Сколько кур на ферме?

В3. Матери 50 лет, дочери 28. Сколько лет тому назад дочь была в 2 раза моложе матеры?

В4. Лодка шла против течения 4,5 ч и по течению 2,1 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если она прошла всего 52,2 км, а скорость течения реки равна 3 км/ч.

В5. Расстояние между двумя пристанями на реке равно 60 км. Это расстояние катер проходит по течению реки за 2 ч, а против течения — за 3 ч. Найдите собственную скорость движения катера.

В6. Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 4 см больше ширины, а площадь равна 60 см^2.

В7. В кинотеатре число мест в ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в нем имеется 884 места?

В8. Катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 км/ч, прошел 36 км против течения и 22 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки.

В9. В шахматном турнире было сыграно 45 партий. Определите число участников турнира, если известно, что все участники сыграли друг с другом по одной партии.

В10. Для наполнения бассейна через первую трубу потребуется на 9 ч больше времени, чем при наполнении через первую и вторую трубы и на 7 ч меньше, чем через одну вторую трубу. За сколько часов наполнится бассейн через обе трубы?

B11. Поезд движется со скорость 40 км/ч. По наблюдению машиниста встречный поезд, длина которого 75 м, проходит мимо него за 3 с. Какова скорость движения встречного поезда?

B11

B12. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найдите это число.

B12

B13. На перегоне в 600 км после прохождения $\frac{1}{4}$ пути поезд был задержан на 1 ч 30 мин. Чтобы прийти на конечную станцию вовремя, машинист увеличил скорость поезда на 15 км/ч. Сколько времени поезд находился в пути?

B13

B14. Токарь за определенное время должен изготовить 180 деталей. Каждый день он изготовлял на 2 детали больше, чем планировал, и выполнил задание на 3 дня раньше срока. Сколько деталей за день изготовлял токарь?

B14

B15. Две бригады, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Первая бригада, работая одна, может выполнить задание на 10 ч быстрее, чем вторая. Сколько часов необходимо первой бригаде, чтобы выполнить задание?

B15

B16. В соревнованиях по волейболу было сыграно 28 игр. Сколько команд участвовали в соревнованиях, если все команды сыграли друг с другом по одному разу?

B16

B17. Морская вода содержит 5 % соли (по весу). Сколько килограммов пресной воды необходимо добавить к 30 кг морской, чтобы получить раствор, в котором процентное содержание соли было бы на 70 % меньше, чем процентное содержание соли в морской воде?

B17

B18. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 30 км, выехал мотоциклист, а через 6 мин следом за ним выехал автобус, скорость которого на 15 км/ч больше скорости мотоциклиста. Найдите скорость (в км/ч) автобуса, если в пункт B он прибыл на 4 мин раньше, чем мотоциклист.

B18

Тренировочные тестовые задания к разделу 4 «Числа и выражения»

Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Турист должен был пройти за 2 дня 25,2 км. В первый день он прошел $\frac{4}{7}$ пути. Сколько километров прошел турист во второй день?

B2

B2. За три дня продали 320 коробок конфет. За первый день продали 40 % этого количества, за другой — $\frac{7}{16}$ остатка. Сколько коробок конфет продали за третий день?

B3

B3. Экскурсантов можно посадить в лодки по 8 или по 12 человек. И в первом и во втором случае свободных мест не останется. Сколько было экскурсантов, если их было больше 50, но меньше 90?

B4

B4. Фермер засеял пшеницей три поля, общая площадь которых 1800 га. Площадь первого поля составляет 50 % площади второго, а площадь третьего больше площади первого в 3 раза. Какова площадь третьего поля?

B5

B5. В одном поезде в 2 раза больше вагонов, чем во втором. Когда от первого поезда отцепили 11 вагонов, а ко второму прицепили 15 вагонов, то в обоих поездах стало вагонов поровну. Сколько вагонов было в первом поезде сначала?

B6

B6. Мягкий припой для паяльных работ — сплав, который содержит 40 % меди, 2 % сурьмы и 58 % свинца. Сколько меди нужно взять, чтобы изготовить 7 т мягкого припоя?

B7

B7. В соревнованиях по теннису участвовали одинаковые по количеству участников команды, всего 123 мальчика и 82 девочки. Во всех командах было одинаковое количество мальчиков и девочек. Сколько команд участвовало в соревнованиях?

B8. Сколько килограммов соли необходимо добавить к 7,5 кг 12 %-го раствора соли, чтобы получить 20 %-й раствор?

B8

B9. Бассейн наполняется одной трубой через 3 часа, а второй — через 2 часа. За сколько часов наполнится бассейн, если одновременно открыть обе трубы?

B9

B10. Из двух городов, расстояние между которыми 500 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 4 часа они встретились. Если первый поезд отправится на 5 часов раньше второго, то встреча произойдет через 2 часа после отправления второго поезда. Какова скорость первого поезда?

B10

B11. Восемь лет назад отец был в 5 раз старше дочери. Сколько лет отцу сейчас, если он в 3 раза старше дочери?

B11

B12. Из двух городов, расстояние между которыми 500 км, одновременно отправились навстречу друг другу два автомобиля. Скорость одного автомобиля равна 76 км/ч. Какова скорость второго автомобиля, если известно, что через 3 ч движения расстояние между ними составляло 128 км?

B12

Часть 2

При выполнении заданий С1–С6 требуется привести полное обоснованное решение и ответ.

C1. В первый день трактористы вспахали $\frac{3}{8}$ поля, во второй день — 40 % от того, что осталось, а в третий — оставшиеся 216 га. Найдите площадь поля.

C2. На сколько процентов снизится цена товара, если сначала ее снизили на 10 %, а потом еще на 20 %?

C3. На сколько процентов увеличится реальная заработная плата, если цены на все продовольственные и непродовольственные товары уменьшатся на 20 %?

C4. Производительность труда повысилась на 14 %. На сколько процентов снизилась трудоемкость труда?

C5. На сколько процентов увеличилась производительность труда, если время на выполнение определенной операции снизилось на 20 %?

C6. Цена первого товара повысилась на 30 %, а потом еще на 5 %. Цена второго товара повысилась на 25 %. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена одного товара больше первоначальной цены второго товара.

Раздел 5
Геометрические фигуры и их свойства

5.1. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Неравенство треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и теорема косинусов. Площадь треугольника

5.1.1. Равенство треугольников

Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$.

На чертеже равные отрезки отмечают одной, двумя или тремя черточками, а равные углы — одной, двумя или тремя дужками.

Для обозначения равенства треугольников используют обычный знак равенства: $\Delta PQR = \Delta MNK$. При этом имеет значение порядок, в котором записываются вершины треугольника. Равенство $\Delta PQR = \Delta MNK$ означает, что $\angle P = \angle M$; $\angle Q = \angle N$; $\angle R = \angle K$. А запись $\Delta PQR = \Delta NKM$ означает уже другое: $\angle P = \angle N$; $\angle Q = \angle K$; $\angle R = \angle M$.

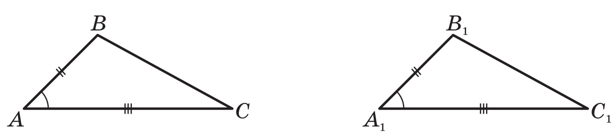
Свойства равных треугольников

1. В равных треугольниках все соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.) равны.

2. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов лежат равные стороны.

Признаки равенства треугольников

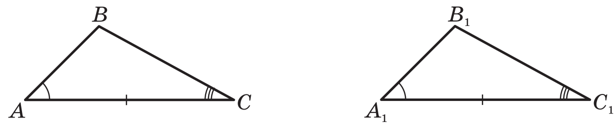
1. По двум сторонам и углу между ними



Если $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Если **две стороны и угол между ними** одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

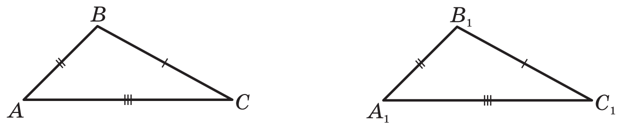
2. По стороне и прилежащим к ней углам



Если $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle C_1$; $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

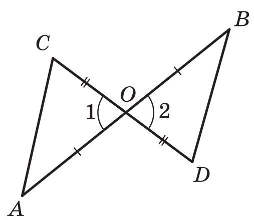
Если **сторона и прилежащие к ней углы** одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. По трем сторонам



Если $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Если **три стороны одного треугольника** равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

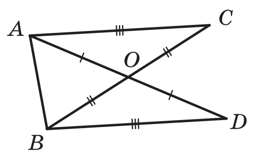


Пример 1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если $AC = 10$ м?

Дано: $CO = OD$; $AO = OB$; $AC = 10$ м.

Найти: BD.

Решение. $CO = OD$; $AO = OB$ по условию; $\angle 1 = \angle 2$, так как они вертикальные; $\Delta AOC = \Delta BOD$ по первому признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство их соответственных сторон $BD = AC$, т. к. по условию $AC = 10$ м, то и $BD = 10$ м.



Пример 2. Даны ΔABC и ΔBAD. AB — общая сторона ΔABC и ΔBAD. Стороны AD и BC пересекаются в точке O, которая является их серединой. Доказать, что $\Delta AOC = \Delta BOD$.

Дано: $\Delta ABC = \Delta BAD$. $AO = DO$;
$BO = CO$.

Доказать: $\Delta AOC = \Delta BOD$.

Доказательство. $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные углы. $AO = OD$ и $CO = BO$ по условию, тогда $\Delta AOC = \Delta BOD$ по двум сторонам и углу между ними.

5.1.2. Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если они переводятся один в другой с помощью преобразования подобия.

Свойства подобных треугольников

1. У подобных треугольников соответственные **углы равны**, а соответственные **стороны пропорциональны**.

Если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{k}{k_1} = \ldots = k$$

2. Отношение **периметров** подобных треугольников равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия:

$$\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=k\ .$$

3. Отношение **площадей** подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=k^2\ .$$

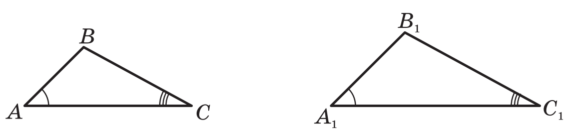
Замечание. Из соотношения $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ очевидно вытекает соотношение $AB : AC : BC = A_1B_1 : A_1C_1 : B_1C_1$, что тоже выражает пропорциональность сторон ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

Пример 1. *Дано*: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; $A_1B_1 = 4$ см; $B_1C_1 = 5$ см; $A_1C_1 = 6$ см; $BC : B_1C_1 = 3$.
Найти: AB, AC и BC.
Решение. $BC : B_1C_1 = 3$ (по условию), тогда $BC = 3 \cdot B_1C_1 = 3 \cdot 5 = 15$ (см); $AC = 3 \cdot A_1C_1 = 3 \cdot 6 = 18$ (см); $AB = 3 \cdot A_1B_1 = 3 \cdot 4 = 12$ (см).
Ответ: $BC = 15$ см; $AC = 18$ см; $AB = 12$ см.

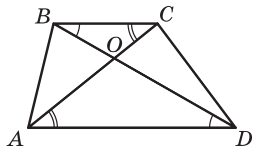
Пример 2. *Дано:* $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.
Найти: углы ΔMNP, если $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$.
Решение. У подобных треугольников соответственные углы равны, тогда $\angle A = \angle M = 45°$; $\angle C = \angle P = 75°$; $\angle B = \angle N = 180° - (45° + 75°) = 60°$.
Ответ: $\angle M = 45°$; $\angle N = 60°$; $\angle P = 75°$.

Признаки подобия треугольников

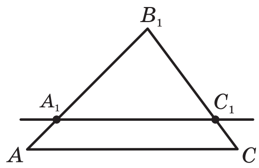
1. Признак подобия по двум углам



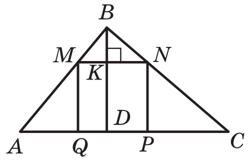
Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны:
если $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
Следствия:
1. Равносторонние треугольники подобны.
2. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.
3. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу между соответственными сторонами.
4. При пересечении диагоналей трапеции образуются два подобных треугольника.



$ABCD$ — трапеция; $\Delta BOC \sim \Delta DOA$.
5. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, пересекает две другие стороны, отсекает треугольник, подобный данному.



$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta AB_1C$, если $A_1C_1 \parallel AC$.



Пример. Основание треугольника 5 см, высота, проведенная к этому основанию, 3 см. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах.

Найти: сторону квадрата.

Решение. $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (т. к. $MN \parallel AC$).

Тогда $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BC}{BN} = \dfrac{BD}{BK}$.

Пусть $MN = x$, тогда $BK = (3 - x)$ см; $AC = 5$ см.

Из подобия треугольников следует, что $\dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BD}{BK}$; $\dfrac{5}{x} = \dfrac{3}{3-x}$; $5 \cdot (3 - x) = 3x$; $15 - 5x = 3x$; $8x = 15$;

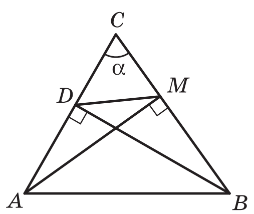
$x = \dfrac{15}{8}$; $x = 1{,}875$.

Ответ: 1,875 см.

2. Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны:

если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Пример. В ΔABC с острым углом C проведены высоты AM и BD. Доказать, что $\Delta ABC \sim \Delta MDC$.

Решение. У треугольников ABC и MDC угол C общий.

Из ΔAMC: $(\angle AMC = 90°)$ имеем:

$MC = AC \cdot \cos\alpha$;

из ΔDCB $(\angle BDC = 90°)$ имеем: $DC = BC \cdot \cos\alpha$,

т. е. стороны, прилежащие к углу C, у треугольников пропорциональны. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta MDC$ по двум углам.

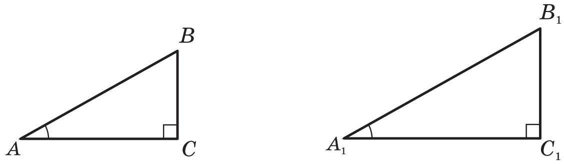
3. Признак подобия треугольников по трем сторонам

Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то треугольники подобны:

если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

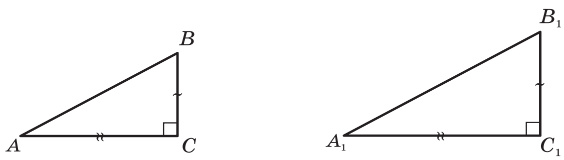
1. По острому углу



Если прямоугольные треугольники имеют по одному равному острому углу, то они подобны:

$$\angle A = \angle A_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

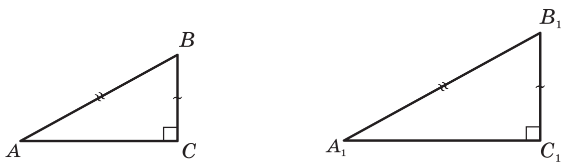
2. По двум пропорциональным катетам



Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

3. По пропорциональным катету и гипотенузе

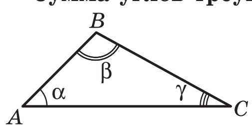


Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

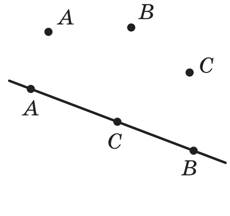
Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°.



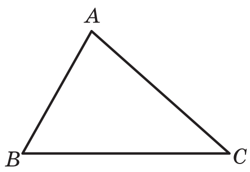
$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°.}$$

5.1.3. Неравенство треугольника



Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из них не больше суммы расстояний от них до третьей точки:

$$AB \le AC + BC.$$



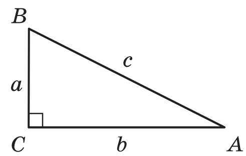
В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон:

$$AB < AC + BC$$
$$AC < AB + BC$$
$$BC < AB + AC.$$

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

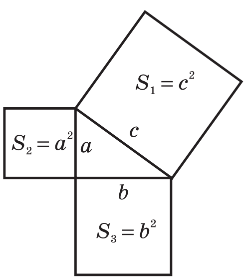
$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + CB^2} \textbf{ или } \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$



Следствия из теоремы Пифагора

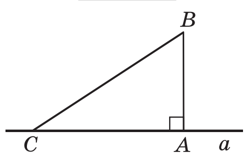
1. В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.
2. Квадрат катета равен разности квадратов гипотенузы и другого катета:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ и } b^2 = c^2 - a^2.$$



3. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах:

$$S_1 = S_2 + S_3.$$



Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.

Пусть BA — перпендикуляр к прямой a, C — любая точка прямой a, отличная от A, тогда BC — наклонная к прямой a, AC — проекция наклонной на прямую a, C — основание наклонной, A — основание перпендикуляра. Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то:

1) любая наклонная больше перпендикуляра;
2) равные наклонные имеют равные проекции;
3) наклонные равны, если равны их проекции;
4) из двух наклонных больше та, у которой проекция больше;
5) из двух проекций больше та, которая соответствует большей наклонной.

5.1.4. Решение треугольников

Стороны и углы треугольника называются **основными его элементами.**

Решить треугольник означает по трем основным элементам треугольника найти три других его основных элемента.

При этом среди заданных элементов хотя бы один должен быть стороной треугольника.

Теорема косинусов

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Следствия

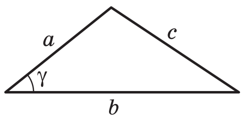
1. Косинус угла треугольника можно вычислить по формуле:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

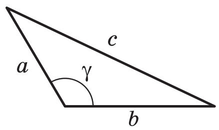
Аналогично:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

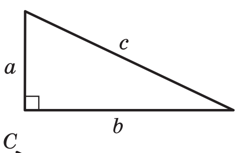
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$



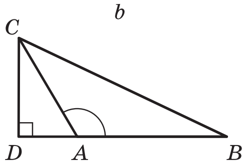
2. Если в треугольнике со сторонами a, b и c
$a^2 + b^2 > c^2$, то угол γ, противолежащий стороне c, острый;



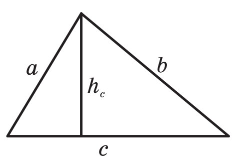
$a^2 + b^2 < c^2$, то угол γ — тупой;



$a^2 + b^2 = c^2$, то угол γ — прямой (обратная теорема Пифагора).

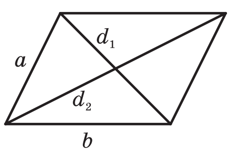


3. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «±» удвоенное произведение одной из них на проекцию другой. Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «–» — когда угол острый.



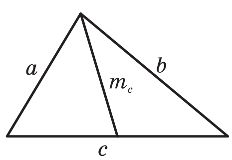
4. Если a, b и c — стороны треугольника, то высота, опущенная на сторону c, равна:

$$h_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$



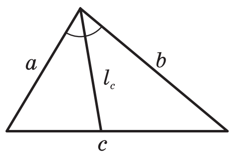
5. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$



6. Если a, b и c — стороны треугольника, то медиана, проведенная к стороне c, вычисляется по формуле:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

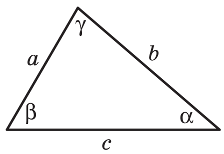


7. Длина биссектрисы треугольника вычисляется по формуле:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

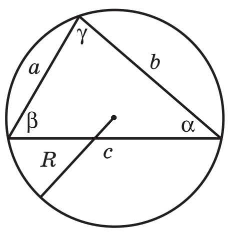
где l_c — биссектриса, проведенная к стороне c; a_1, b_1 — отрезки стороны c, на которые делит ее биссектриса l_c.

Теорема синусов



Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Замечание. **Полная формулировка теоремы синусов:** в треугольнике со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β и γ

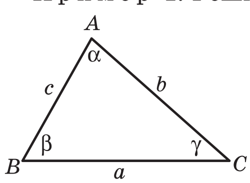
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около данного треугольника.

Следствие

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Пример 1. Решите треугольник по его стороне и прилежащим к ней углам.



Дано: a, β, γ.

Найти: α, b, c.

Решение. $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$. По теореме синусов: $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Дано: $a = 5$; $\beta = 30°$; $\gamma = 45°$.

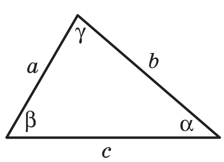
Найти: α, b, c.

Решение. $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 105°$.

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{5\cdot\sin 30°}{\sin 105°} \approx \frac{5\cdot 0{,}5}{0{,}966} \approx 2{,}59; \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{5\cdot 0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66.$$

Ответ: $\alpha = 105°$; $b = 2{,}59$; $c = 3{,}66$.

Пример 2. Решите треугольник по трем сторонам.



Дано: a, b, c.

Найти: α, β, γ.

Решение. По теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

Дано: $a = 2$; $b = 3$; $c = 4$.

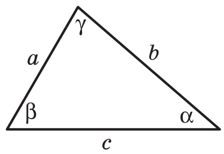
Найти: α, β, γ.

Решение. $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2\cdot 3\cdot 4} = \dfrac{7}{8} \approx 0{,}875$; $\alpha \approx 29°$;

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2^2 + 4^2 - 3^3}{2\cdot 2\cdot 4} = 0{,}688; \quad \beta \approx 47°; \gamma = 180° - 47° - 29° = 104°.$$

Ответ: $\alpha = 29°$; $\beta = 47°$; $\gamma = 104°$.

П р и м е р 3. Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними.



Дано: a, b, γ.

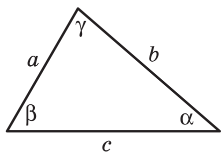
Найти: α, β, c.

Решение. По теореме косинусов находим c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \beta = 180° - (\alpha + \gamma).$$

П р и м е р 4. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.



Дано: a, b, α.

Найти: β, γ, c.

Решение. По теореме синусов

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}.$$

Угол β найдем с помощью таблиц или микрокалькулятора. $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

По теореме синусов находим c:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Исследование.

Если $a < b$, задача имеет решение, если $a \geq b\sin\alpha$. Имеют место два случая:

- $a = b\sin\alpha$, то $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = 1$, $\beta = 90°$: одно решение;
- $a > b\sin\alpha$, тогда задача имеет два решения: β может быть острым и тупым.

если $a < b\sin\alpha$, то $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} > 1$, решения нет;

Дано: $a = 73{,}5$; $b = 86{,}4$; $\alpha = 49°$.

Найти: β, γ, c.

Решение.

Найдем величину угла β:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} \approx \frac{86{,}4 \cdot 0{,}7547}{73{,}5} \approx 0{,}887.$$

Поскольку $a < b$ и $\dfrac{b\sin\alpha}{a} < 1$, то задача имеет два решения:

а) $\beta \approx 62°30'$; $\gamma = 180° - (49° + 62°30') \approx 68°30'$;

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{73{,}5 \cdot 0{,}9304}{0{,}755} \approx 90{,}6.$$

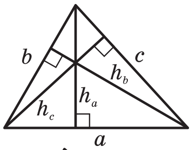
б) $\beta_1 = 180° - \beta \approx 117°30'$; $\gamma_1 = 180° - (49° + 117°30') \approx 13°30'$;

$$c_1 = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{73{,}5 \cdot 0{,}2334}{0{,}755} \approx 22{,}7.$$

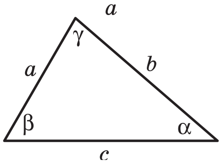
Ответ: $\beta = 62°30'$; $\gamma = 68°30'$; $c = 90{,}6$; или $\beta_1 = 117°30'$; $\gamma_1 = 13°30'$; $c_1 = 22{,}7$.

5.1.5. Площадь треугольника

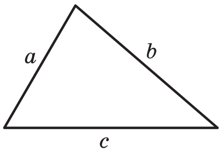
Площадь S треугольника ABC вычисляется по формулам:



1. $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$.



2. $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$.

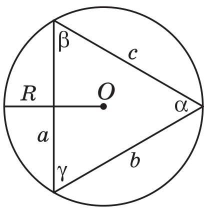


3. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$

или

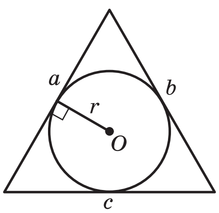
$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\ .$$

Данная формула называется **формулой Герона**.



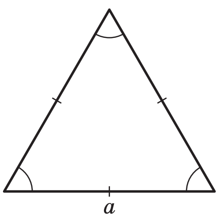
4. $S=\frac{abc}{4R}$ или $S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.



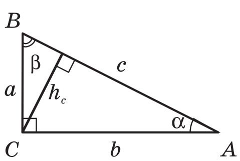
5. $S=p\cdot r$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$,

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.



6. Площадь **равностороннего** (правильного) треугольника можно вычислить по формуле:

$$S_{\text{прав.тр.}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



7. Площадь **прямоугольного** треугольника:

$$S=\frac{1}{2}c\cdot h_c.$$

Следствие. Стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т. е. $a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$

Это означает, что чем больше сторона треугольника, тем меньше высота, проведенная к ней.

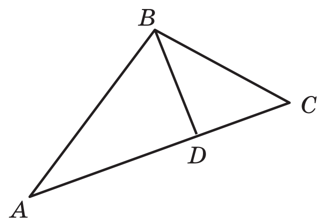
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.1.
«Треугольник»

Часть 1

Ответом на задания В1–В36 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

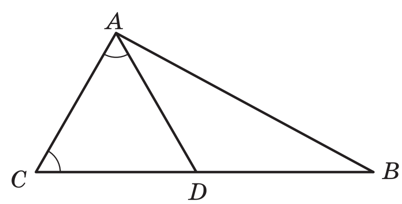
В1

В1. На рисунке изображен треугольник ABC, периметр которого равен 24 см. Периметр треугольника ABD 12 см, а периметр треугольника BCD — 20 см. Найдите BD.



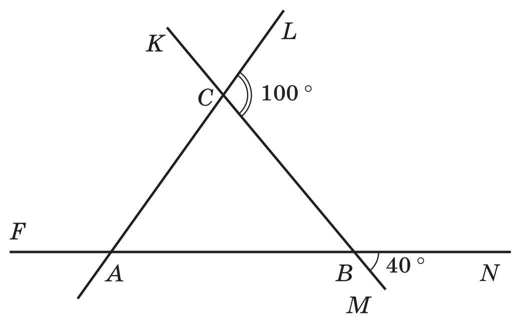
В2

В2. В треугольнике ABC $\angle DAC = \angle DCA$, $AB = 4$ см, $AC = 3$ см, периметр треугольника ABD равен 9 см. Найдите периметр треугольника ABC.



В3

В3. На рисунке $\angle NBM = 40°$, $\angle LCB = 100°$. Найдите $\angle LAF$.



В4

В4. Внутри треугольника ABC взята точка D так, что $\angle ADC = 140°$, $\angle BAD = 35°$, $\angle BCD = 40°$. Найдите $\angle ABC$.

B5. Стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см. Найдите диагональ прямоугольника.

B5

B6. Найдите высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна $\sqrt{3}$.

B6

B7. Найдите сторону равностороннего треугольника, если его медиана равна $\sqrt{3}$.

B7

B8. Найдите сторону квадрата, если его диагональ равна $2\sqrt{2}$.

B8

B9. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) CD — медиана, $BC = 5$ см, $BD = 6$ см. Найдите длину гипотенузы AC.

B9

B10. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе, если катеты прямоугольного треугольника равны 4 см и 3 см.

B10

B11. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN, которые пересекаются в точке K. Найдите угол BKC, если $\angle A = 120°$.

B11

B12. В треугольнике ABC $\angle A = 80°$, $\angle C = 40°$. Под каким углом пересекаются высоты AP и CD?

B12

B13. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите больший катет.

B13

B14. В треугольнике ABC $\angle A = 59°$, $\angle B = 62°$. Из вершин этих углов проведены высоты, которые пересекаются в точке O. Найдите градусную меру угла AOB.

B14

B15. Градусная мера внешнего угла A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равна 125°. Найдите градусную меру внутреннего угла B.

B15

B16. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 5, а гипотенуза больше второго катета на 1. Найдите гипотенузу.

B16

B17. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 9, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите периметр треугольника.

B17

B18

B19

B20

B21

B22

B23

B24

B25

B26

B27

B28

B29

B18. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а катеты его относятся друг к другу как 3 : 4. Найдите площадь треугольника.

B19. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $5\sqrt{3}$ см, прилежащий острый угол равен 60°. Найдите второй катет треугольника.

B20. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 3 см, прилежащий острый угол равен 60°. Найдите гипотенузу треугольника.

B21. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $2\sqrt{3}$, противоположный острый угол равен 30°. Найдите второй катет.

B22. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 4, противоположный острый угол равен 30°. Найдите гипотенузу.

B23. В прямоугольном треугольнике один угол равен 60°, катет, который лежит против него, равен $6\sqrt{3}$ см. Найдите гипотенузу.

B24. Найдите больший острый угол треугольника, катеты котого равны $7\sqrt{3}$ см и 7 см.

B25. Катет прямоугольного треугольника равен 3 см, проекция его на гипотенузу равна 1,8 см. Найдите гипотенузу.

B26. Один катет прямоугольного треугольника равен $\sqrt{3}$ см, проекция второго катета на гипотенузу — 2 см. Найдите гипотенузу.

B27. Для острого угла α найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0{,}8$.

B28. Для острого угла α найдите $\mathrm{tg}\ \alpha$, если $\sin \alpha = 0{,}6$.

B29. В треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 15$ см, $AC = 20$ см. Найдите отрезок AD, если BD — биссектриса.

B30. Найдите больший катет прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части, которые равны 30 см и 40 см.

B30

B31. Один катет прямоугольного треугольника равен $\sqrt{5}$ см. Проекция второго катета на гипотенузу равен 4 см. Найдите гипотенузу.

B31

B32. Две стороны треугольника равны 8 см и $4\sqrt{7}$ см, угол, который лежит против большей из них, равен 60°. Найдите длину третьей стороны.

B32

B33. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 14$, $AC = 9$ биссектрисы BD и AE внутренних углов B и A пересекаются в точке O (точки E и D лежат соответственно на сторонах BC и AC). Найдите отношение $AO : OE$.

B33

B34. Стороны треугольника, одна из которых на 8 см больше второй, образуют угол 120°, а длина третьей стороны равна 28 см. Найдите периметр треугольника.

B34

B35. В треугольнике ABC биссектрисы BD и AE внутренних углов B и A пересекаются в точке O. Вычислите длину стороны AC, если $AB = 12$, $AO : OE = 3 : 2$ и $AD : DC = 6 : 7$.

B35

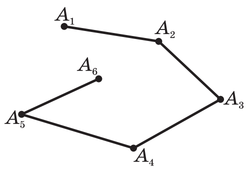
B36. Стороны треугольника, одна из которых вдвое больше второй, образуют угол 120°, а длина третьей стороны равна $3\sqrt{7}$. Найдите наименьшую сторону треугольника.

B36

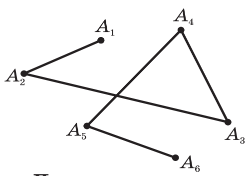
5.2. Многоугольники

Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$.

Точки A_1, A_2, ..., A_n называются **вершинами** ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — **звеньями** ломаной.



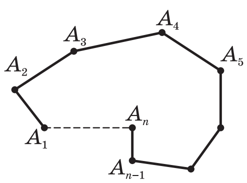
— простая ломаная



— ломаная с самопересечениями

Ломаная называется **простой**, если она не имеет самопересечений.

Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.

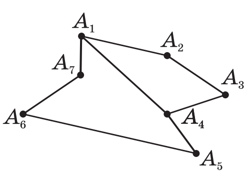


Свойство длины ломаной

Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.

$$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$$

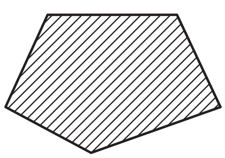
Выпуклые многоугольники

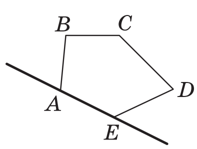


Ломаная называется **замкнутой**, если ее концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой.

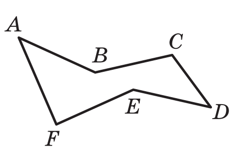
Вершины ломаной называются **вершинами многоугольника**, а звенья ломаной — **сторонами многоугольника**; отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называются **диагоналями**. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами, называется ***n*-угольником**.

Плоским многоугольником, или **многоугольной областью** называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.





— выпуклый многоугольник

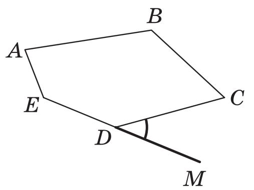


— невыпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости.

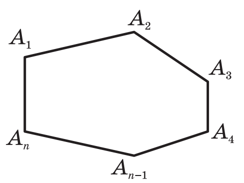
Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами.

$\angle BAE$, $\angle ABC$ — углы выпуклого многоугольника.



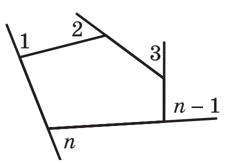
Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине.

Сумма углов выпуклого многоугольника



Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°\,(n-2)$:

$$\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots + \angle A_n = 180°\,(n-2).$$

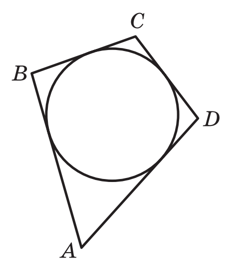


Сумма **внешних углов** выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°:

$$\angle 1 + \angle 2 + \ldots + \angle n = 360°.$$

Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности.

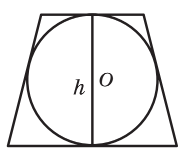
Многоугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности.

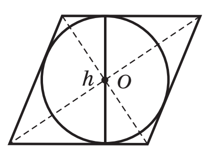


У четырехугольника, описанного около окружности, **суммы длин противоположных сторон равны:**

$$AB + DC = AD + BC.$$

Если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.





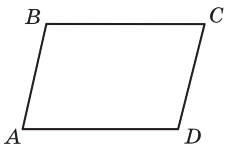
Если **трапеция** или **ромб** описаны около окружности, то их высоты равны диаметру окружности.

Теорема Паскаля. Если **шестиугольник** вписан в окружность и противоположные его стороны непараллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой.

5. **Теорема Брианшона.** Если **шестиугольник** описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

5.2.1. Параллелограмм, его виды. Площадь параллелограмма

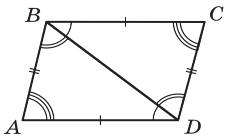
Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



$ABCD$ — параллелограмм,
$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$.

Свойства параллелограмма

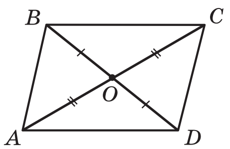
1. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма равны.
3. Противоположные углы параллелограмма равны.
4. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам:



$\Delta ABD = \Delta CDB$,
$\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$,
$AB = CD$; $BC = AD$. $AO = OC$; $BO = OD$.

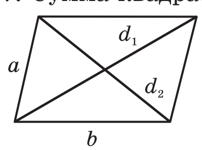
5. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

6. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°:



$\angle A + \angle B = 180°$,
$\angle B + \angle C = 180°$.

7. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:



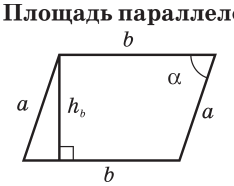
$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Признаки параллелограмма

1. Если **диагонали** четырехугольника **точкой пересечения делятся пополам**, то этот четырехугольник — параллелограмм.
2. Если **противоположные стороны** четырехугольника **равны** друг другу, то этот четырехугольник — параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике **противоположные стороны равны и параллельны**, то этот четырехугольник — параллелограмм.
4. Если **противоположные углы** четырехугольника **равны**, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

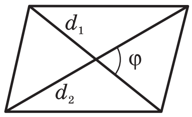


$$S_{\text{пар}} = b \cdot h_b.$$

Площадь параллелограмма можно найти также по формуле:

$$S_{\text{пар}} = a \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Следствие. Первая формула площади параллелограмма позволяет утверждать, что в параллелограмме **большей** будет высота, проведенная к **меньшей** стороне, **меньшей** — высота, проведенная к **большей** стороне.



Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi \,.$$

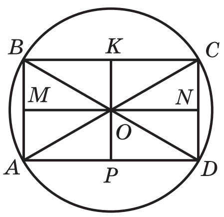
5.2.2. Прямоугольник. Площадь прямоугольника

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы равны.

Свойства прямоугольника

1. **Диагонали** прямоугольника **равны**.

2. Точка пересечения диагоналей прямоугольника является **центром окружности, описанной** около этого прямоугольника.



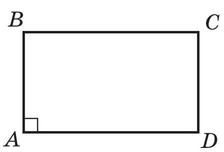
3. Прямая, соединяющая середины противоположных сторон прямоугольника, является осью симметрии.

$AC = BD$,

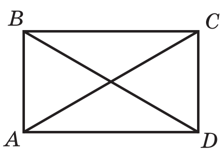
т. O — центр описанной окружности,

MN и KP — оси симметрии.

Признаки прямоугольника

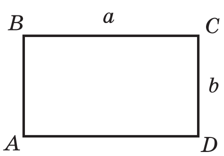


1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, то $ABCD$ — прямоугольник.



2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник.

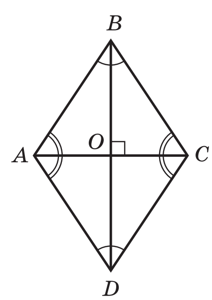
Площадь прямоугольника



Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон:

$$S_{\text{пр}} = ab.$$

5.2.3. Ромб. Площадь ромба

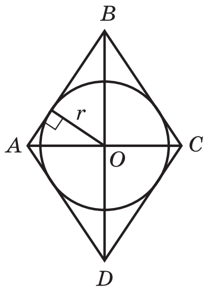


Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба

1. Диагонали ромба делят его на четыре равных прямоугольных треугольника.

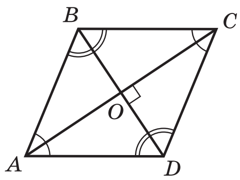
2. Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам (т. е. AC и BD — биссектрисы углов ромба).



3. Диагонали ромба являются его осями симметрии.

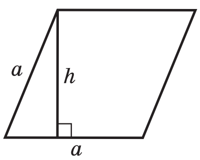
4. Точка пересечения диагоналей ромба является центром вписанной окружности.

Признаки ромба



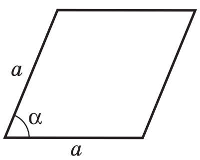
Если $ABCD$ — параллелограмм и
1) $\Delta AOB = \Delta COB = \Delta COD = \Delta AOD$ или
2) $AC \perp BD$ или
3) AC и BD — биссектрисы углов,
то $ABCD$ — ромб.

Площадь ромба



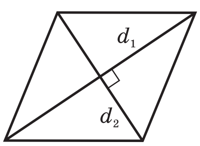
Площадь ромба равна:
а) произведению высоты на сторону:

$$S_{\text{р}} = ah;$$



б) произведению квадрата стороны на синус угла ромба:

$$S_{\text{р}} = a^2 \sin\alpha;$$

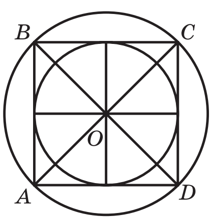


в) половине произведения диагоналей:

$$S_{\text{р}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$

5.2.4. Квадрат. Площадь квадрата

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны. Квадрат — это ромб, у которого все углы прямые.



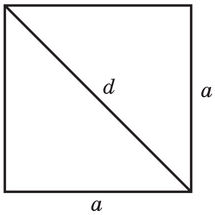
Квадрат имеет все свойства ромба и прямоугольника.

Квадрат — это правильный четырехугольник.

Квадрат имеет четыре оси симметрии: две диагонали и два серединных перпендикуляра к сторонам.

Точка пересечения диагоналей — центр вписанной и описанной окружностей.

Площадь квадрата

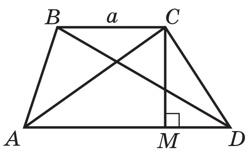


Площадь квадрата равна квадрату его стороны или половине квадрата диагонали:

$$S_{\text{кв}} = a^2 \text{ или } S_{\text{кв}} = \frac{d^2}{2}, \text{ т. е. } a = \frac{d}{\sqrt{2}}\ .$$

5.2.5. Трапеция. Средняя линия трапеции. Площадь трапеции

Трапеция — четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие — непараллельны.



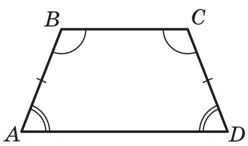
Параллельные стороны называют **верхним** (BC) и **нижним** (AD) **основаниями**; непараллельные — **боковыми сторонами**.

Отрезки, соединяющие противоположные вершины, называют **диагоналями** трапеции (AC и BD).

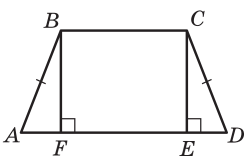
Высотой трапеции ($CM \perp AD$) называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к прямой, содержащей другое основание.

Трапеция называется **равнобокой (равнобедренной, равнобочной)**, если ее боковые стороны равны.

Свойства равнобокой трапеции



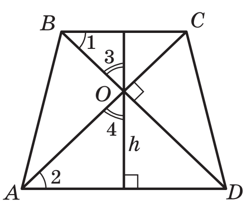
1. Углы при основании равнобокой трапеции равны, т. е. $\angle B = \angle C$; $\angle A = \angle D$.



2. $AF = ED = \dfrac{AD - BC}{2}$;

$$AE = FD = \frac{AD + BC}{2}.$$

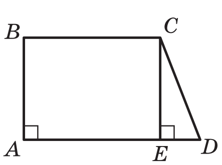
3. Диагонали равнобокой трапеции равны: $AC = BD$.
4. $AO = OD$; $BO = OC$; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.



Заметим, что если выполняется одно из утверждений 1–4, то трапеция — равнобокая.

5. Если $BD \perp AC$, то высота равнобокой трапеции равна полусумме оснований:

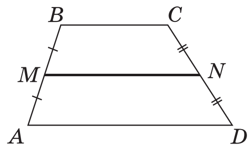
$$h = \frac{BC + AD}{2}.$$



Трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям, называется **прямоугольной**.

$CE \perp AD$; $AB = CE$;
$ABCE$ — прямоугольник,
$ED = AD - BC$.

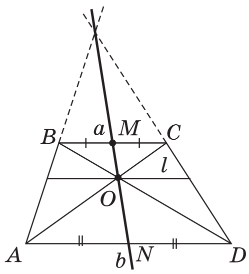
Средняя линия трапеции. Свойства трапеции



1. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**.

Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и **равна полусумме оснований:**

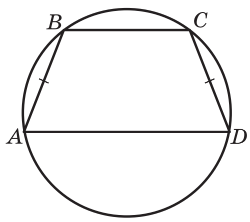
$$BC \parallel MN \parallel AD;\ MN = \frac{BC + AD}{2}.$$



2. В любой трапеции следующие точки лежат на одной прямой:

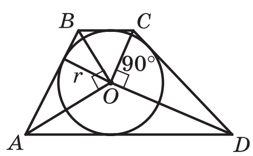
- середины оснований;
- точка пересечения диагоналей;
- точка пересечения продолжений боковых сторон.

3. Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам. Его длина l является **средним гармоническим оснований** трапеции a и b: $l = \frac{2ab}{a+b}$.



4. Около трапеции **можно описать окружность** тогда и только тогда, когда трапеция равнобокая:

$$AB = CD.$$

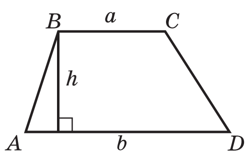


5. В трапецию можно вписать окружность, если **сумма оснований равна сумме боковых сторон**, причем боковые стороны «видно» из центра вписанной окружности под **углом 90°**.

Верно и обратное:

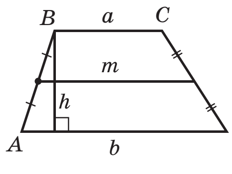
Если в трапецию вписана окружность, то $AB + CD = BC + AD$ и отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны, перпендикулярны: $\angle AOB = \angle COD = 90°$.

Площадь трапеции



Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

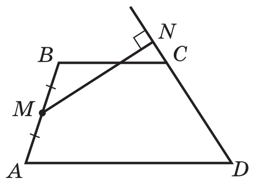


Следствия:

1. Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту:

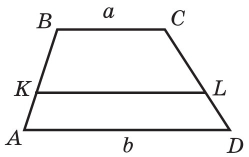
$$S_{\text{тр}} = m \cdot h,$$

где $m = \frac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции.



2. Площадь трапеции можно найти как произведение боковой стороны на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны:

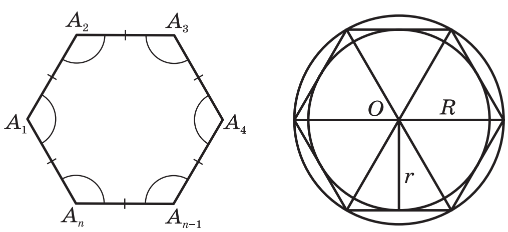
$$S_{\text{тр}} = CD \cdot MN.$$



3. Пусть a и b — основания трапеции. Длина отрезка, параллельного основаниям с концами на боковых сторонах, который делит **площадь трапеции пополам**, равна:

$$KL = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}; \;\; S_{AKLD} = S_{KBCL}.$$

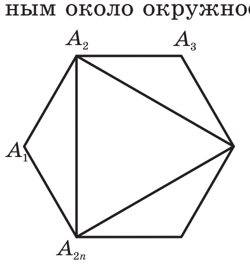
5.2.6. Правильные многоугольники



Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны и все углы равны.

$$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \ldots = \angle A_{n-1} = \angle A_n;$$
$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n.$$

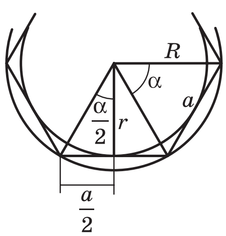
Теорема. Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.



Эти окружности имеют один и тот же центр, который называется центром многоугольника. Угол, под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется **центральным углом** многоугольника.

Вершины правильного $2n$-угольника, если их брать через одну, являются вершинами правильного n-угольника.

Формулы для радиусов вписанных и описанных правильных многоугольников



Найдем радиус R описанной окружности и r вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной a и числом сторон n:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \;\; r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Если обозначить S_n площадь правильного n-угольника, то связь между R, r, S_n и a приведем в таблице.

Сторона b_n правильного описанного многоугольника выражается через сторону a_n правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон через радиус R окружности формулой:

$$b_n = \frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Другие свойства правильных многоугольников

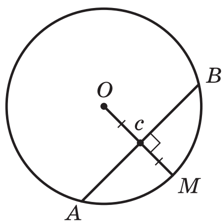
1. Любые два правильных n-угольника подобны друг другу. В частности, если у них стороны равны, то n-угольники тоже равны.

2. Диагонали правильного шестиугольника, проходящие через его центр, разбивают его на шесть правильных треугольников.

3. Сумма расстояний от любой точки внутри правильного многоугольника до его сторон (или их продолжений) не зависит от положения точки:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = \text{const}.$$

4. **Теорема Брианшона.** Если **шестиугольник** описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.



5. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного в окружность **треугольника.**

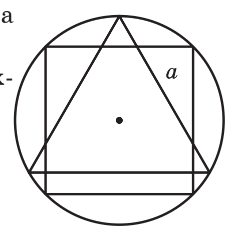
6. У правильных n-угольников отношения периметров и радиусов вписанных и описанных окружностей равны:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Зависимость стороны a_n правильного n-угольника от R и r

Количество сторон	Зависимость a_n от R и n	Зависимость a_n от r и n
n	$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$

Пример 1. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна a. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность.



Решение. Связь между сторонами правильного треугольника и четырехугольника выражается формулами:

$$a_3 = R\sqrt{3};\quad R = \frac{a}{\sqrt{3}};\quad a_4 = R\sqrt{2}.$$

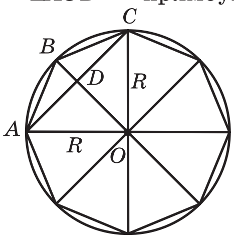
Подставим значение R, получим: $a_4 = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

П р и м е р 2. Докажите, что сторона правильного 8-угольника вычисляется по формуле: $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.

Решение. Пусть AB — сторона правильного восьмиугольника, $AO = BO = CO = R$ — радиус описанной окружности, тогда $AC = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ (из ΔAOC).

ΔAOD — прямоугольный.



$BO \perp AC$ и $\angle DOA = \angle OAD = 45°$, $DO = AD$.

$AD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ и $DO = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Найдем BD. $BD = R - DO$.

$BD = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2R - R\sqrt{2}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{2})}{2}$.

ΔABD — прямоугольный, по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2;\ AB = \sqrt{\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{R(2-\sqrt{2})}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{R^2}{4}(2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2)} = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 4 \cdot (2-\sqrt{2})}{4}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Ответ: $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.2. «Многоугольники»

Часть 1

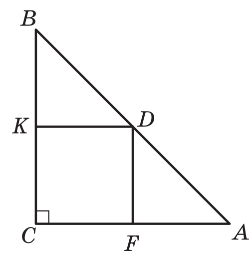
Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1. Найдите больший угол параллелограмма, если диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 15° и 45°.

B2. Найдите меньший угол параллелограмма, если сумма двух углов параллелограмма равна 120°.

B3. Найдите меньший угол параллелограмма, если разность двух углов параллелограмма равна 120°.

B4. В прямоугольном треугольнике $CB = AC = 10$ см. В этот треугольник вписан прямоугольник $CKDF$. Найдите периметр прямоугольника.

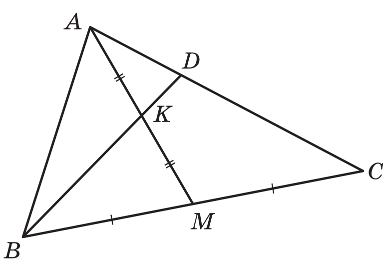


B5. $ABCD$ — параллелограмм, точка K — середина стороны AB. Отрезок DK пересекает диагональ AC в точке O. Найдите отношение $AO : OC$.

B6. Средняя линия трапеции равна 7 см, а ее высота — $\frac{15\sqrt{3}}{7}$. Угол между диагоналями трапеции равен 120°. Найдите произведение длин диагоналей трапеции.

B7. Одна из диагоналей равнобокой трапеции делит эту трапецию на равнобедренные треугольники. Найдите острый угол между диагоналями трапеции.

B8. Точка K — середина медианы AM треугольника ABC, прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Найдите отношение $AC : AD$.



B9. Каждый из трех углов выпуклого многоугольника равен 80°, а каждый из остальных углов — по 150°. Сколько вершин имеет этот многоугольник?

B9

B10. Большее основание трапеции равно 18. Найдите ее меньшее основание, если расстояние между серединами диагоналей равно 4.

B10

B11. Под каким углом пересекаются две диагонали правильного пятиугольника, проведенные из разных вершин?

B11

B12. Основания равнобокой трапеции равны 11 см и 21 см, боковая сторона равна 13 см. Найдите длину диагонали.

B12

B13. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC + AD = 10$ см, $AC = 6$ см, $BD = 8$ см. Найдите площадь трапеции.

B13

B14. Основания трапеции равны 11 см и 4 см, диагонали 9 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

B14

B15. Найдите внутренний угол правильного восьмиугольника.

B15

B16. Основания равнобокой трапеции равны 6 см и 2 см, а ее площадь равна 8 см^2. Найдите острый угол трапеции.

B16

B17. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 6 см и 12 см. Найдите периметр трапеции.

B17

B18. В окружность, диаметр которой равен $\sqrt{12}$, вписан четырехугольник $ABCD$.

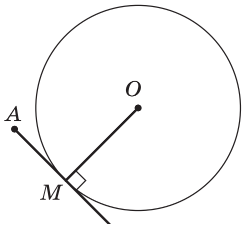
Найдите диагональ BD, если $\angle BAD = 60°$.

B18

5.3. Окружность

5.3.1. Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга

Касательная к окружности, секущая



Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной к окружности.

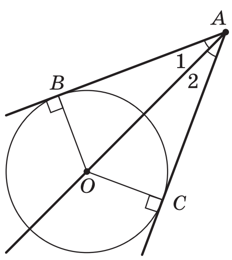
Эта общая точка (точка M) называется **точкой касания**.

Длиной касательной, проведенной из точки A к окружности с точкой касания M, является отрезок AM.

Свойства касательной

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу (диаметру), проведенному в точку касания:

$$OC \perp AC;\ OB \perp AB.$$



2. Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные. Длины этих касательных равны:

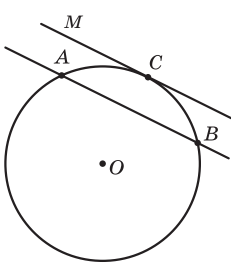
$$AB = AC.$$

Биссектриса угла между этими касательными проходит через центр окружности.

AO — биссектриса $\angle BAC$.

3. Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам:

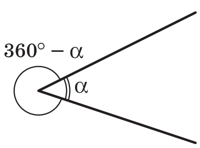
если $MC \parallel AB$, то $\smile AC = \smile BC$.



Если прямая имеет **две общие** точки с окружностью, то говорят, что прямая и окружность пересекаются. В таком случае прямую называют **секущей**.

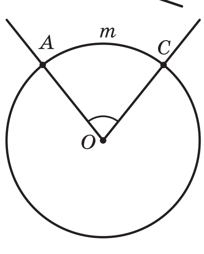
Свойство секущей: если прямая проходит через точку, внутреннюю относительно окружности (т. C), то она пересекает окружность в двух точках, т. е. является секущей.

Центральный и вписанный углы



Угол разбивает плоскость на две части, каждая из которых называется **плоским** углом. Плоские углы с общими сторонами называются **дополнительными**.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.

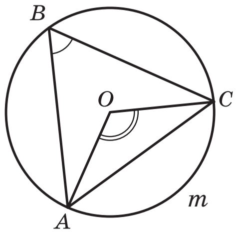


Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Иначе говорят, что центральный угол измеряется дугой окружности:

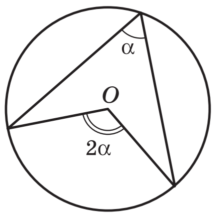
$$\smile AmC = \angle AOC.$$

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность.**



$\angle ABC$ вписан в окружность. Его вершина B лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках A и C.

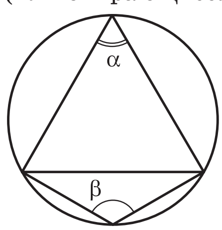
$\angle ABC$ и $\angle AOC$ **опираются** на дугу AmC (или на хорду AC). Говорят: хорда AC **стягивает** $\angle AOC$ (или $\cup AmC$), или хорду AC **видно** из точки O под углом AOC.



Теорема 1. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

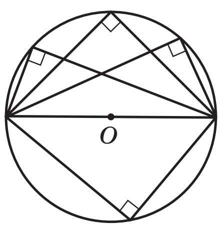
Следствия

1. Все вписанные углы, опирающиеся на **одну и ту же хорду** и лежащие по одну сторону от нее (или опирающиеся на одну и ту же **дугу**), **равны.**



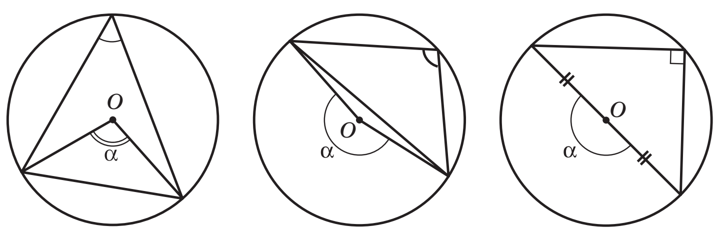
2. Если два вписанных угла опираются на одну и ту же хорду, а их вершины лежат по разные стороны от хорды, то сумма этих углов равна 180°:

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

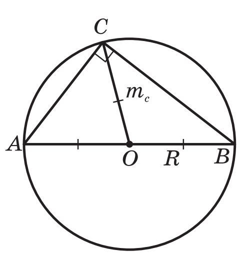


3. Все **углы**, опирающиеся на **диаметр**, — **прямые.**

4. Центр окружности, описанной около **остроугольного** треугольника, лежит внутри треугольника; около **тупоугольного** треугольника — вне треугольника; около **прямоугольного** треугольника — на середине гипотенузы.

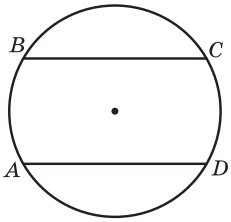


$\alpha < 180^\circ$ $\alpha > 180^\circ$ $\alpha = 180^\circ$



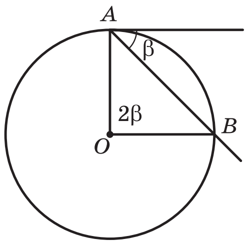
5. **Медиана** прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два равнобедренных треугольника и равна половине гипотенузы и радиусу описанной окружности:

$$AO = BO = CO = \frac{1}{2}AB\ .$$



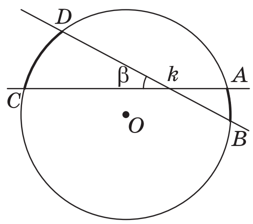
6. Градусные меры дуг окружности, расположенных между двумя параллельными хордами, **равны**:

$$\cup AB = \cup CD.$$



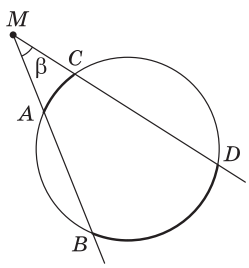
Теорема 2. Угол, образованный касательной и хордой, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой:

$$\beta = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \angle AOB\,.$$



Теорема 3. Угол, образованный пересекающимися хордами, с вершиной внутри окружности, равен полусумме соответствующих дуг:

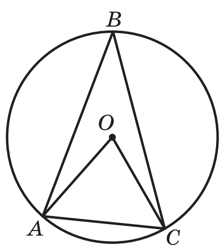
$$\beta = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup DC)\,.$$



Теорема 4. Угол, образованный секущими к окружности, с вершиной вне окружности, равен полуразности соответствующих дуг.

$$\beta = \frac{1}{2}(\cup BD - \cup AC).$$

П р и м е р. Точки A, B и C лежат на окружности. Чему равен $\angle ABC$, если хорда AC равна радиусу окружности?

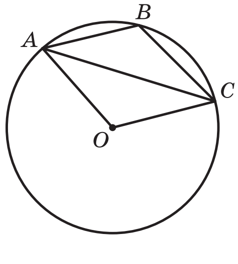


Случай 1. Хорда AC и вершина вписанного угла лежат по разные стороны от центра окружности.

Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC.$

$AC = AO = OC = R$, ΔAOC — равносторонний, $\angle AOC = 60°$, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30°.$

Ответ: 30°.



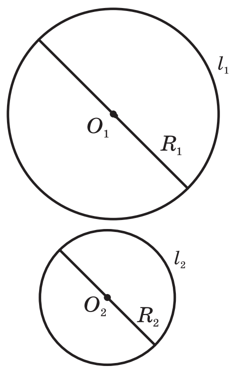
Случай 2. Хорда AC и вершина вписанного угла лежат по одну сторону от центра окружности.

Тогда $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC;$

$\angle AOC = 180° - 30° = 150°.$

Ответ: 150°.

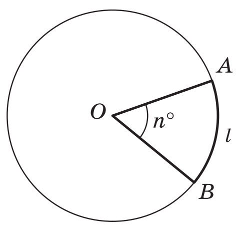
Длина окружности. Радианная мера угла



Окружность иногда рассматривают как правильный многоугольник с бесконечно большим количеством сторон.

Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей:

$$\frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2} = \pi \quad (\pi \approx 3{,}14).$$



Длина окружности равна: $l = 2\pi R$ или $l = \pi \cdot D$, $D = 2R$.

Длина дуги окружности вычисляется по формуле:

$l_{\smile} = \dfrac{\pi R}{180°} \cdot n°$, $n°$ — градусная мера угла;

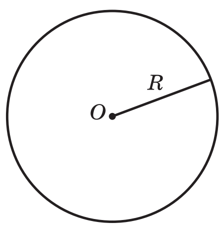
$l = \alpha R$, где α — радианная мера угла.

Радианную меру угла получают из градусной умножением на $\dfrac{\pi}{180°}$, т. е. $\alpha = \dfrac{\pi}{180°} \cdot n°$, где α — радианная мера угла, а $n°$ — градусная мера угла.

Единицей радианной меры дуги является угол в 1 радиан. **Угол в 1 радиан** — это центральный угол, у которого **длина дуги равна радиусу**.

Градусная мера угла в 1 радиан равна примерно $\dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$.

Площадь круга и его частей

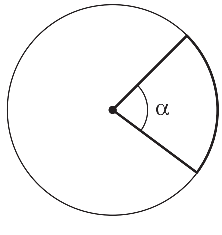


Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки **не больше** данного. Эта точка называется **центром круга**, данное расстояние — **радиусом круга**. Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом.

Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус:

$$S = \frac{1}{2}(2\pi R) \cdot R; \; S = \pi R^2 \text{ или } S = \frac{\pi d^2}{4},$$

где $d = 2R$ — диаметр окружности.



Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

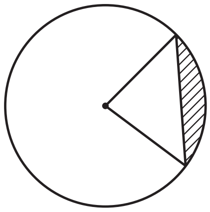
Площадь кругового сектора вычисляется по формуле:

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°,$$

где $n°$ — градусная мера соответствующего центрального угла, или

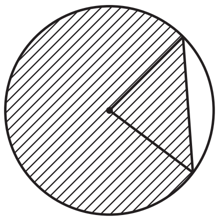
$$S_{\text{сект.}} = \frac{\alpha \mathrm{R}^2}{2},$$

где α — радианная мера центрального угла.



Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости. Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_\Delta,$$



где n° — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «–» надо брать, когда $n^\circ < 180^\circ$, а знак «+» надо брать, когда $n^\circ > 180^\circ$.

Если $n^\circ = 180^\circ$, то площадь полукруга

$$S_{\text{п/кр.}} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

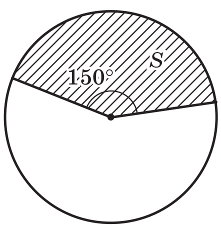
Поскольку $\sin(360^\circ - n^\circ) = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin n^\circ = -\sin\alpha$, то площадь указанного треугольника $S_\Delta = \pm\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$, и эта формула имеет вид:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ - \sin n^\circ\right)$$

или

$$S_{\text{сегм}} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha),$$

где n° — градусная мера угла, α — радианная мера угла.



П р и м е р. Найдите площадь сектора радиуса R, если соответствующий ему центральный угол равен 150°.

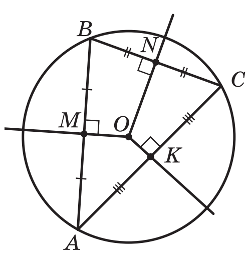
Решение.

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2 \cdot 150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi R^2}{12}.$$

Ответ: $S = \frac{5\pi R^2}{12}$.

5.3.2. Окружность, описанная около треугольника

Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.



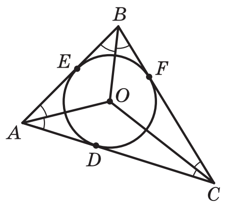
Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон.

Около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

$$BN = NC;\ KC = KA;\ BM = MA;$$
$$OM \perp AB;\ ON \perp BC;\ OK \perp AC$$

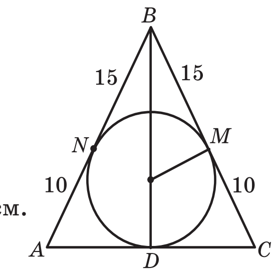
5.3.3. Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.



Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

В **любой треугольник** можно вписать **окружность,** и только **одну**.



Пример. Точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит боковую сторону на отрезки 15 и 10 см, считая от вершины. Найдите периметр треугольника.

Решение: ΔABC — равнобедренный, значит, $BM = BN = 15$ см; $NA = MC = 10$ см. По свойству касательных, выходящих из одной точки, $CM = CD = 10$ см и $AD = AN = 10$ см.

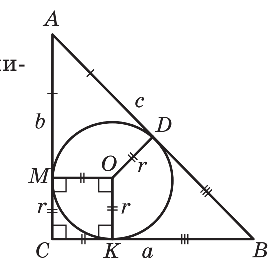
Тогда имеем: $AB = BC = 25$ см; $AC = 20$ см; $P = 2AB + AC = 2 \cdot 25 + 20 = 70$ см.

Ответ: 70 см.

5.3.4. Комбинация окружностей, описанных и вписанных в треугольник

В **прямоугольном треугольнике:**

$$OK = OM = OD = r \ (OKCM \text{ — квадрат}).$$



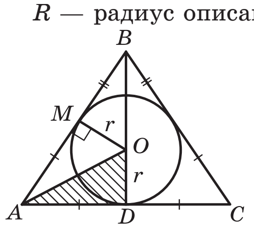
Сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей:

$$a + b = 2R + 2r$$

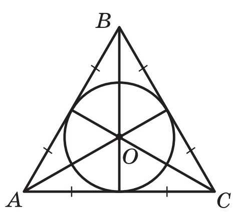
$$\text{или } r = \frac{a+b-c}{2}, \text{ т. к. } R = \frac{c}{2},$$

r — радиус вписанной окружности;

R — радиус описанной окружности.



В **равнобедренном треугольнике:** центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на медиане, высоте и биссектрисе, проведенной к основанию. Кроме того: AO — биссектриса $\angle A$; $OD = OM = r$.



В **равностороннем треугольнике** центры окружности, **описанной** около равностороннего треугольника, и окружности, **вписанной** в него, **совпадают.** Это точка пересечения медиан, биссектрис и высот этого треугольника, которую называют **центром** равностороннего треугольника.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.3. «Окружность»

Часть 1

Ответом на задания В1–В18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

В1 ☐

В1. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 3 см и 5 см. Найдите длину большей хорды.

В2 ☐

В2. Концы диаметра удалены от касательной к окружности на 5 см и 15 см. Найдите длину диаметра.

В3 ☐

В3. Хорда длиной 33 см удалена от центра окружности на 28 см. Найдите диаметр окружности.

В4 ☐

В4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус окружности, описанной вокруг него, равен 5 см, а один из катетов — 6 см.

В5 ☐

В5. Длина дуги окружности равна 10 см, а радиус окружности равен 2 см. Найдите радианную меру дуги.

В6 ☐

В6. Стороны прямоугольника равны 6 и 8. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

В7 ☐

В7. Из данной точки окружности проведены диаметр и хорда, которая равна радиусу. Найдите угол между диаметром и хордой.

В8 ☐

В8. Даны три окружности O_1, O_2, O_3 с радиусами соответственно 1 см, 3 см, 5 см, которые внешне касаются. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

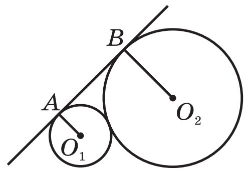
В9 ☐

В9. Концы диаметра удалены от касательной к окружности на расстояния 8 см и 5 см. Найдите длину c окружности. В ответ запишите $\frac{c}{\pi}$.

В10 ☐

В10. Радиус окружности равен $2\sqrt{3}$. Из точки, которая удалена от центра на расстояние $4\sqrt{3}$, проведены касательные к окружности. Найдите длины касательных.

B11. Две окружности, радиусы которых равны 4 см и 9 см, имеют внешнее касание. Прямая касается окружностей в точках A и B. Найдите AB.

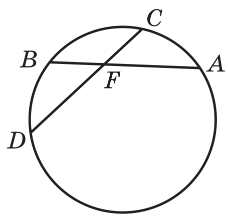


B11

B12. Радиус окружности равен R. Из точки, которая удалена от центра на расстояние $2R$, проведены касательные к окружности. Найдите угол между касательными.

B12

B13. Две хорды пересекаются в точке F. Отрезки одной хорды равны 24 см и 14 см, один из отрезков второй хорды равен 28 см. Найдите второй отрезок второй хорды.



B13

B14. Гипотенуза прямоугольного треугольника $AB = 12$, катет $AC = 8$. Найдите радиус окружности с центром на гипотенузе, которая касается катета CB и проходит через вершину A.

B14

B15. В равнобокую трапецию вписана окружность. Точка касания окружности делит боковую сторону трапеции на отрезки длиной 8 и 18. Найдите периметр трапеции.

B15

B16. Площадь ромба равна 24 см^2, его периметр равен 20 см. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в этот ромб.

B16

B17. Вокруг окружности радиусом 5 описана равнобокая трапеция, длина боковой стороны которой равна 12. Вычислите площадь трапеции.

B17

B18. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12, его площадь равна 48. Найдите радиус вписанной окружности.

B18

5.4. Равные векторы. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

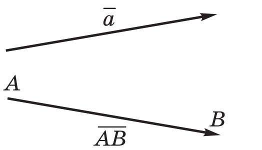
5.4.1. Скалярные и векторные величины

Величины бывают двух видов. Величины, которые характеризуются своими числовыми значениями: длина, площадь, температура, масса называют **скалярными величинами,** или **скалярами.**

Однако множество физических величин характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлением: сила, скорость, давление.

Величины, которые характеризуются не только числовыми значениями, но и направлением, называют **векторными величинами,** или **векторами.**

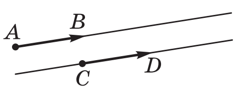
Вектором называется направленный отрезок.



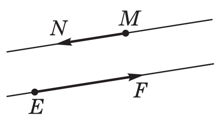
Для обозначения векторов используют маленькие латинские буквы: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}, \ldots$ или две большие: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Первая буква при такой записи означает начало вектора, а вторая — конец. Вместо слова «вектор» над буквенным обозначением ставят черту: $\overline{CD}$, $\overline{m}$, $\overline{b}$ и т. д.

Абсолютной величиной, или **модулем** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB, который изображает вектор. Длина вектора $\overline{AB}$ (или $\overline{a}$) обозначается: $\left|\overline{AB}\right|$ (или $\left|\overline{a}\right|$).

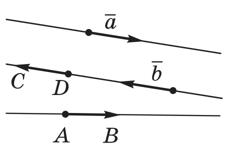
Нулевым вектором называется вектор $\overline{AA}$, начало и конец которого совпадают. Поэтому любую точку можно считать вектором. Нулевой вектор обозначается $\overline{0}$. Направления нулевой вектор не имеет, его длина равна нулю, т. е. $\left|\overline{0}\right| = 0$.



Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **одинаково направленными,** если лучи AB и CD одинаково направлены.

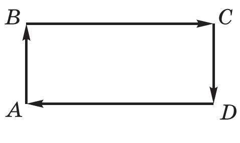


Векторы $\overline{MN}$ и $\overline{EF}$ называются **противоположно направленными,** если лучи MN и EF противоположно направлены.



Векторы называются **коллинеарными,** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Например, $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{DC}$ коллинеарны, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ неколлинеарны.



Векторы в прямоугольнике $ABCD$: $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ — коллинеарны, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ — неколлинеарны.

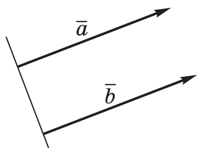
5.4.2. Равенство векторов

Два вектора называются **равными,** если они совмещаются параллельным переносом.

Это означает, что существует **параллельный перенос,** который переводит начало и конец одного вектора в начало и конец другого вектора.

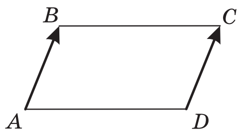
Из данного определения следует:

Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине: $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.



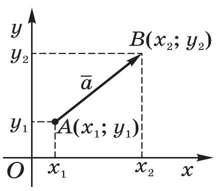
Если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.

Для решения задач бывает полезна теорема — **признак равенства векторов.**



Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ не лежат на одной прямой, то для равенства векторов необходимо и достаточно, чтобы четырехугольник *ABCD* был параллелограммом.

5.4.3. Координаты вектора



Пусть вектор $\overline{a}$ имеет началом точку $A(x_1;\ y_1)$, а концом точку $B(x_2;\ y_2)$. Координатами вектора $\overline{a}$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$.

Чтобы найти координаты вектора $\overline{a}(a_1; a_2)$, надо от координат конца вектора отнять соответствующие координаты начала. Координаты **нулевого вектора** равны нулю.

Из формулы, выражающей расстояние между двумя точками через их координаты, следует, что абсолютная величина вектора $\overline{a}(a_1; a_2)$ равна: $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты.

Если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

П р и м е р. Найдите координаты и абсолютную величину вектора $\overline{AB}$, если $A(3;\ 5)$ и $B(7;\ 5)$.

Решение. $\overline{AB}\,(7 - 3;\ 5 - 5)$; $\overline{AB}\,(4;\ 0)$.

$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4.$

Ответ: (4; 0); 4.

5.4.4. Сложение векторов

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с координатами $(a_1,\ a_2)$ и $(b_1,\ b_2)$ называется вектор $\overline{c}$ с координатами $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$, т. е.

$$\overline{a}(a_1; a_2) + \overline{b}(b_1; b_2) = \overline{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)\ .$$

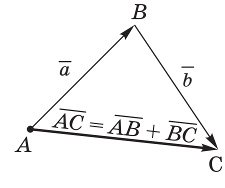
Например, $\overline{a}\,(-2;\ 5)$ и $\overline{b}\,(7;\ -10)$; $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, тогда

$$\overline{c} = (\overline{-2+7; 5-10});$$

$$\overline{c}(\overline{5; -5}).$$

Правила сложения векторов

1. Правило треугольника



Какими бы ни были точки A, B и C, имеет место векторное равенство:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Это правило дает следующий способ сложения векторов:

1) от произвольной точки построим вектор $\overline{a}$;

2) от конца вектора $\overline{a}$ отложим вектор $\overline{b}$;

3) тогда вектор $\overline{c}$ — вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец — с концом вектора $\overline{b}$, является суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

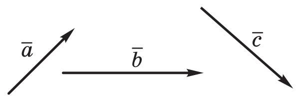
Этим способом можно складывать любое количество векторов.

2. Правило параллелограмма

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить так, чтобы они выходили из одной точки, то их **сумма** — диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Вектор-сумма $\overline{c}$ выходит из той же точки, что и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

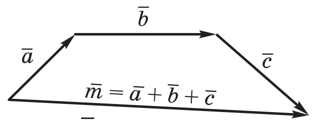
П р и м е р. Есть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Дано:



Найдите: вектор $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.

Построение:



1) отложим вектор $\overline{a}$ от произвольной точки;

2) от конца вектора $\overline{a}$ отложим вектор $\overline{b}$, от конца вектора $\overline{b}$ отложим вектор $\overline{c}$;

3) сумма векторов $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, начало его совпадает с началом вектора $\overline{a}$, конец — с концом вектора $\overline{c}$.

Законы сложения векторов

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a} \qquad \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a} \qquad \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$$

5.4.5. Умножение вектора на число

Произведением вектора $(\overline{a_1; a_2})$ на число λ называется вектор $(\overline{\lambda a_1; \lambda a_2})$, т. е. $(\overline{a_1; a_2})\lambda = (\overline{\lambda a_1; \lambda a_2})$.

По определению $(\overline{a_1; a_2})\lambda = \lambda(\overline{a_1; a_2})$.

Законы умножения вектора на число

Для любого вектора $\overline{a}$ и чисел λ и μ: $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$.

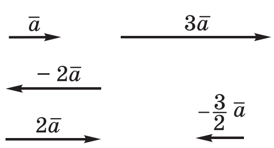
Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и числа λ: $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$.

Абсолютная величина вектора $\lambda\overline{a}$ равна $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$.

Направление вектора $\lambda\overline{a}$:

если $\lambda > 0$ — совпадает с направлением $\overline{a}$; если $\lambda < 0$ — противоположно направлению $\overline{a}$.

Например:



П р и м е р. *Даны* векторы $\bar{a}(3;2)$ и $\bar{b}(0;-1)$.
Найти: абсолютную величину вектора $\bar{c}=-2\bar{a}+4\bar{b}$.
Решение.

$\bar{c}=-2\bar{a}+4\bar{b}=-2\overline{(3;2)}+4\overline{(0;-1)}=\overline{(-6;-4)}+\overline{(0;-4)}=\overline{(-6;-8)}$; $\left|\bar{c}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10.$

Ответ: 10.

5.4.6. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами

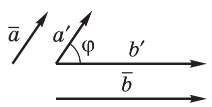
Скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1;a_2)$ и $\bar{b}(b_1;b_2)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{a}$ обозначается $\bar{a}^2$ и называется **скалярным квадратом** $\bar{a}^2$; очевидно, $\bar{a}^2=\left|\bar{a}\right|^2$.

Из определения скалярного произведения следует: для любых векторов $\bar{a}(a_1;a_2)$, $\bar{b}(b_1;b_2)$ и $\bar{c}(c_1;c_2)$

$$(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}.$$



Углом между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом.

Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Теорема. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\varphi.$$

Следствия

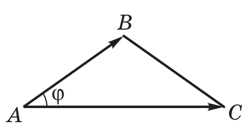
1. Косинус угла между векторами можно найти по формуле: $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$.

2. Если векторы **перпендикулярны**, то их **скалярное произведение равно нулю.**

Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

П р и м е р. Дан треугольник с вершинами $A(0;\sqrt{3})$; $B(2;\sqrt{3})$; $C\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Найти: угол А.



*Решение. Н*айдем угол между векторами, выходящими из точки A, т. е. $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$

1. Найдем координаты векторов: $\overline{AB}=\overline{(2-0;\sqrt{3}-\sqrt{3})}$; $\overline{AB}(2;0)$;

$\overline{AC}=\left(\dfrac{3}{2}-0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)$; $\overline{AC}\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Найдем модули векторов: $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{2^2+0^2}=2$; $\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$.

3. Найдем скалярное произведение векторов:

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2\cdot\dfrac{3}{2}+0\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=3.$

4. Итак: $\cos\varphi=\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\varphi=30°$. *Ответ:* 30°.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.4. «Векторы»

Часть 1

> Ответом на задания В1–В18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1. Даны векторы $\vec{a}(3; -2; -1)$, $\vec{b}(1; 1; 2)$, $\vec{c}(-3; 2; 4)$. Найдите координаты вектора $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{n}$.

B2. Найдите $|\overrightarrow{AC}|$, если $A(2;\ -3;\ -1)$, $C(3;\ -1;\ -3)$.

B3. Даны векторы $\vec{a}(4; -3; 0)$, $\vec{b}(-6; 0; 8)$. Найдите $|\vec{a}| + |\vec{b}|$.

B4. Даны векторы $\vec{a}(4; -2; 0)$, $\vec{b}(-6; 0; 1)$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

B5. При каком значении n векторы $\vec{a}(3; 1; 5)$ и $\vec{b}(-6; -2; n)$ колинеарны?

B6. При каком значении p векторы $\vec{a}(3; p; -1)$ и $\vec{b}(p; -2; 5)$ взаимно перпендикулярны?

B7. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$, а угол между векторами равен $120°$.

B8. Точки $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(2;\ 1;\ 2)$, $C(1;\ -2;\ 1)$ — вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D. В ответ запишите сумму координат точки D.

B9. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b} + \vec{c}$ (в градусах), если известно, что $\vec{a}(2; 2)$, $\vec{b}(2; 4)$ и $\vec{c}(-2; -6)$.

B10. Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $120°$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

B11. Найдите угол (в градусах) между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$.

B11

B12. Найдите угол (в градусах) между векторами $\vec{a}(-1;\ 2)$ и $\vec{b}(3;\ -1)$.

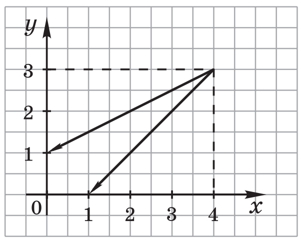
B12

B13. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(3;\ 0;\ -4)$ и $\overrightarrow{AD}(0;\ 5;\ 0)$.

B13

B14. Вычислите скалярное произведение векторов, изображенных на рисунке.

B14



B15. В квадрате $ABCD$ сторона AB равна 1,5. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

B15

B16. Определите угол (в градусах) между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}$, если известно, что $\vec{a}(3;\ 5;\ -4)$, $\vec{b}(-2;\ 5;\ -4)$, $\vec{c}(0;\ 0;\ 2)$.

B16

B17. Параллелограмм $ABCD$ построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$. Найдите величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в градусах).

B17

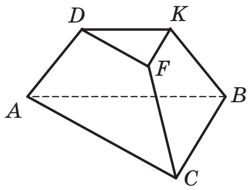
B18. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $120°$ и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

B18

5.5. Многогранники

Многогранником называется тело, поверхность которого ограничена конечным числом плоских многоугольников.

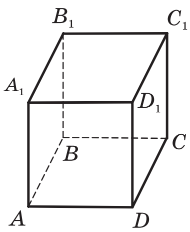
Многоугольники, ограничивающие поверхность тела, называются **гранями**, стороны граней называются **ребрами**, вершины граней называются **вершинами** многогранника.



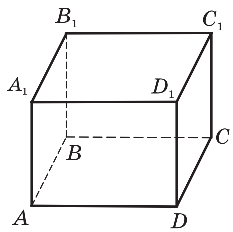
На рисунке изображен многогранник $ABCDKF$; ABC, $ADFC$, $CFKB$, $ABKD$, DKF — грани; AB, BC, AC, AD, FC, KB, DF, DK, KF — ребра; A, B, C, D, K, F — вершины.

Площадью поверхности многогранника называется сумма площадей его граней:

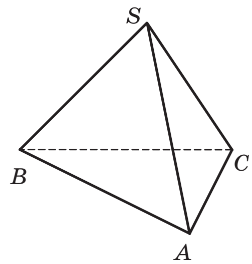
$$S = S_{ABC} + S_{ADFC} + S_{CFKB} + S_{ABKD} + D_{DKF}.$$



Куб — это многогранник, поверхность которого ограничена шестью равными квадратами.



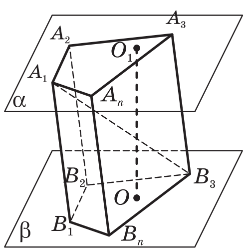
Прямоугольный параллелепипед — это многогранник, поверхность которого ограничена шестью прямоугольниками.



Тетраэдр — это многогранник, поверхность которого ограничена четырьмя треугольниками.

5.5.1. Призма

Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников (оснований призмы), которые лежат в разных плоскостях и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, которые соединяют соответствующие точки этих многоугольников.



Отрезки, соединяющие соответствующие вершины, называются **боковыми ребрами призмы.**

Призма называется ***n*-угольной**, если основание — n-угольник.

$A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — **основания призмы;**

$A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — **боковые грани призмы;**

A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — **боковые ребра призмы.**

Боковая поверхность призмы состоит из боковых граней призмы.

Поверхность (полная поверхность) призмы состоит из оснований и боковой поверхности.

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания (**расстояние** между плоскостями оснований).

OO_1 — высота призмы.

Диагональ призмы — отрезок, соединяющий две вершины призмы, которые не принадлежат одной грани.

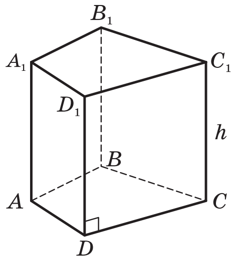
Например, A_1B_3 — диагональ призмы.

Призма, в основании которой лежат параллелограммы, называется **параллелепипедом**.

Свойства призмы

1. Основания призмы — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.
2. Боковые ребра призмы параллельны и равны.
3. Боковые грани призмы — параллелограммы.

Виды призм



1. **Прямая призма** — это призма, все боковые ребра которой перпендикулярны основаниям.

Свойства прямой призмы

1) Основания прямой призмы — равные многоугольники, которые лежат в параллельных плоскостях.

2) Боковые ребра прямой призмы параллельны, равны и перпендикулярны плоскостям оснований, т. е. являются высотами призмы.

Высота прямой призмы равна длине бокового ребра.

3) Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Плоскости боковых граней перпендикулярны плоскостям оснований.

Параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны основанию, называют **прямым**. Прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники, называется **прямоугольным**. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется **кубом**.

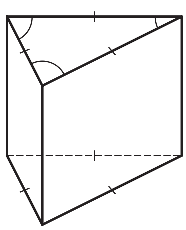
2. Наклонная призма — призма, у которой боковые ребра не перпендикулярны плоскостям оснований.

3. Правильная призма — прямая призма, основания которой — правильные многоугольники. Очевидно, что все свойства прямой призмы справедливы и для правильной призмы.

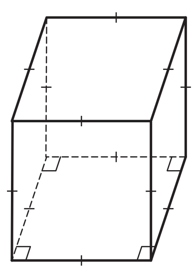
Свойства правильной призмы

1. Боковые грани правильной призмы — равные прямоугольники.
2. Площадь боковой поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и высотой h вычисляется по формуле:

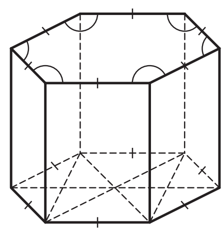
$$S_{\text{бок.}} = n \cdot a \cdot h.$$



правильная
треугольная
призма

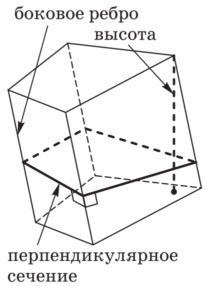


правильная
четырехугольная
призма



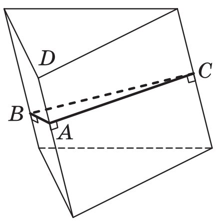
правильная
шестиугольная
призма

Сечение призмы плоскостью. Площадь боковой и полной поверхности призмы. Объем призмы



Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется ее сечение плоскостью, которая пересекает все боковые ребра и перпендикулярна им.

Построение перпендикулярного сечения в наклонной призме



1. Через точку A на боковом ребре проводим к этому ребру перпендикуляры AB и AC, которые лежат на двух смежных боковых гранях (иногда точку A берут на одной из вершин призмы).

2. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости доказываем перпендикулярность прямой DA и плоскости ABC.

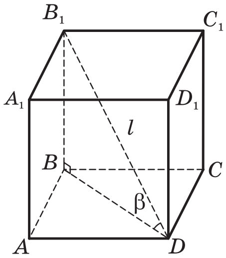
3. Используя свойство параллельных прямых, перпендикулярных плоскости, доказываем, что ABC — искомое сечение.

Если $n > 3$, построение производится аналогично.

Площадь поверхности и объем призмы

	Наклонная призма	**Прямая призма**
Боковая поверхность	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{пер.}} \cdot l$, где $P_{\text{пер.}}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H$, где $P_{\text{осн.}}$ — периметр основания, H — высота
Полная поверхность	$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$	$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$
Объем	$V = S_{\text{пер.}} \cdot l$ или $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, где $S_{\text{пер.}}$ — площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро	$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания призмы, H — высота

П р и м е р 1. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Решение. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, ее основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты, боковые ребра перпендикулярны основаниям. Так как $B_1B \perp (ABCD)$, то BD — проекция диагонали B_1D призмы на плоскость основания. Тогда $\angle B_1DB$ — угол, образованный этой диагональю с плоскостью $(ABCD)$.

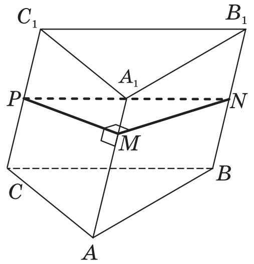
По условию: $\angle B_1DB = \beta$; $B_1D = l$. $S_{\text{бок.}} = P_{ABCD} \cdot B_1B$.

Из ΔB_1BD ($\angle B_1BD = 90°$, т. к. $B_1B \perp (ABCD)$): $B_1B = B_1D \sin\angle B_1DB = l\sin\beta$; $BD = B_1D\cos\angle B_1DB = l\cos\beta$.

Из ΔABD ($\angle BAD = 90°$): $AB^2 + AD^2 = BD^2$, а т. к. $AB = AD$, то $2AB^2 = BD^2 = l^2\cos^2\beta$; $AB = \dfrac{l\cos\beta}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}l\cos\beta}{2}$.

$S_{\text{бок.}} = 4 \cdot AB \cdot B_1B = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}l\cos\beta}{2} \cdot l\sin\beta = \sqrt{2}l^2\sin 2\beta$. *Ответ:* $\sqrt{2}l^2\sin 2\beta$.

П р и м е р 2. Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 6 см, две боковые грани ее взаимно перпендикулярны, и их площади равны 24 см^2 и 30 см^2. Найдите объем призмы.



Решение. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

$S_{AA_1B_1B} = 24\,\text{см}^2,\ S_{AA_1C_1C} = 30\,\text{см}^2,\ A_1A = 6$ см.

Плоскости CAA_1 и BAA_1 перпендикулярны.

Проведем через точку $M \in A_1A$ плоскость, перпендикулярную AA_1. Она пересекает прямые C_1C и B_1B, параллельные прямой A_1A, в точках P и N. Линии пересечения секущей плоскости с плоскостями боковых граней образуют ΔMPN.

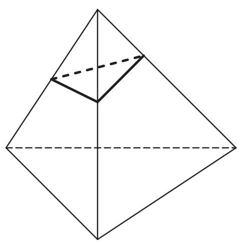
Т. к. $A_1A \perp (PMN)$, а прямые MP и MN лежат в плоскости PMN, то $A_1A \perp MP$ и $A_1A \perp MN$, значит, $\angle PMN$ — линейный угол двугранного угла при ребре A_1A. По условию $\angle PMN = 90°$. $V = S_{\Delta PMN} \cdot A_1A$.

$S_{AA_1B_1B} = A_1A \cdot MN$, т. к. боковая грань AA_1B_1B — параллелограмм со стороной A_1A и высотой MN. Тогда $6 \cdot MN = 24$; $MN = 4$ (см). Аналогично $S_{AA_1C_1C} = A_1A \cdot MP$, $6 \cdot MP = 30$; $MP = 5$ (см).

$S_{\Delta MNP} = \dfrac{1}{2} MN \cdot MP = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10\,(\text{см}^2)$. $V = 10 \cdot 6 = 60$ (см^3).

Ответ: 60 см^3.

Построение сечений



Секущей плоскостью геометрического тела называется любая плоскость, по обе стороны от которой — точки данного тела.

Сечением геометрического тела называется фигура, состоящая из общих точек секущей плоскости и поверхности данного тела.

Основные правила построения сечений

1. Если даны (или уже построены) две точки плоскости на одной грани многогранника, то след сечения — прямая, проходящая через эти точки.

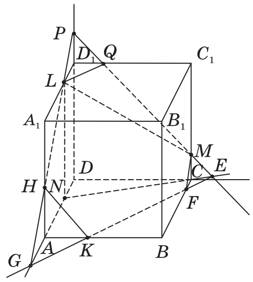
2. Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании) и есть точка, лежащая в данной грани, то необходимо определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (она будет точкой пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой гранью).

3. Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

Способы построения сечений

Способ соответствия состоит в том, что для построения сечений необходимо сначала построить те точки нижнего основания многогранника, которые взаимно однозначно отвечают точкам искомого сечения.

Способ следов состоит в том, что в плоскости нижнего основания (иногда на некоторой другой плоскости) выполняется построение **следов** (линий и точек пересечения секущей плоскости, некоторых прямых). С помощью этих следов легко выполняется построение точек пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника.



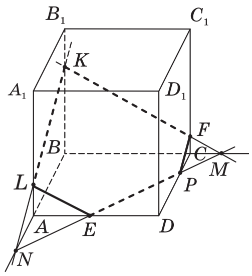
П р и м е р 3. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через три заданные точки: $K \in AB$, $L \in A_1D_1$ и $M \in CC_1$.

Решение. Опустим из данной точки L перпендикуляр LN на AD. Проведем прямые LM и NC до их пересечения в точке E (эти прямые лежат в одной плоскости (LMN) и непараллельны, поэтому пересекутся в некоторой точке E).

Проведем прямую EK до пересечения с прямыми BC и AD соответственно в точках F и G. Проведем прямую GL до пересечения с прямыми AA_1 и DD_1

в точках H и P. Точку P соединим с заданной точкой M и на пересечении PM с ребром D_1C_1 получим точку Q. Точки L, Q, M, F, K и H последовательно соединим. Фигура $LQMFKH$ — искомое сечение.

Пример 4. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через точки: $K \in B_1B$, $E \in AD$, $P \in DC$.



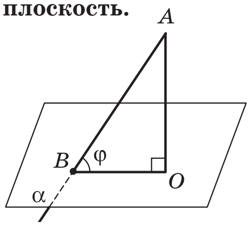
Решение. Для построения сечения необходимо построить точки пересечения плоскости (KEP) с гранями куба. Плоскость (KEP) с плоскостью ($ABCD$) пересекается по прямой PE.

Эта прямая пересекает плоскость BB_1C_1C в точке M, а плоскость AA_1B_1B — в точке N.

Теперь определим точки, лежащие на грани AA_1B_1B, т. е. проведем прямую через точки N и K, получим точку L на ребре AA_1, проведем прямую KM на грани BB_1C_1C, получим точку F — точку пересечения прямой KM с ребром CC_1. Сечение куба плоскостью (KEP) выполнено: это пятиугольник $ELKFP$.

Угол между прямой и плоскостью

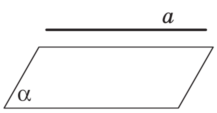
Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Для построения проекции прямой a на плоскость α достаточно найти две точки проекции: например, точку пересечения прямой a и плоскости α и основание какого-нибудь перпендикуляра, опущенного из другой точки прямой a на плоскость.

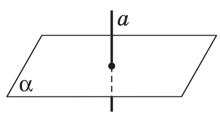
$AO \perp \alpha$, BO — проекция AB на плоскость α.

$\angle ABO = \varphi$ — угол между AB и плоскостью α.



$a \parallel \alpha$

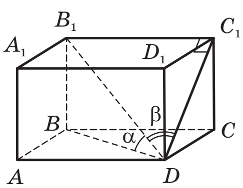
Угол между параллельными прямой и плоскостью считается равным 0°.



$a \perp \alpha$

Угол между перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°.

Пример. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с основанием угол α, а с боковой гранью угол β. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть $B_1D = d$.

$\angle B_1DB = \alpha$, $\angle B_1DC_1 = \beta$.

Из ΔB_1DB: $BB_1 = B_1D \sin\alpha = d \sin\alpha$, $BD = B_1D \cos\alpha = d\cos\alpha$.

Из ΔB_1C_1D: $B_1C_1 = B_1D \sin\beta = d\sin\beta = BC$. Из ΔBCD:

$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{BD^2 - B_1C_1^2} =$

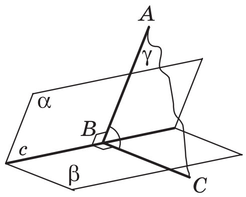
$= \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta} = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. Для объема прямоугольного параллелепипеда имеем:

$$V = BB_1 \cdot BC \cdot CD = d\sin\alpha \cdot d\sin\beta \cdot d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = d^3 \sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

Ответ: $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

5.5.1.3. Угол между плоскостями

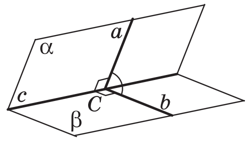
Углом между плоскостями α и β, пересекающимися по прямой c, называется угол между прямыми, по которым третья плоскость γ, перпендикулярная их линии пересечения, пересекает плоскости α и β.



$\angle ABC$ — угол между плоскостями α и β, т. к. $AB \perp c$; $BC \perp c$, $AB \subset \alpha$, $BC \subset \beta$.

Угол между параллельными плоскостями равен 0°.

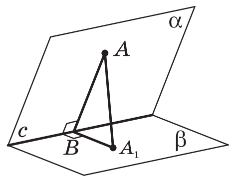
Угол между плоскостями лежит в пределах от 0° до 90°.



Способы построения угла между плоскостями

1. На прямой c пересечения плоскостей α и β выбираем точку C. Через C в плоскостях α и β проводим прямые a и b, перпендикулярные c. Угол между прямыми a и b равен углу между плоскостями:

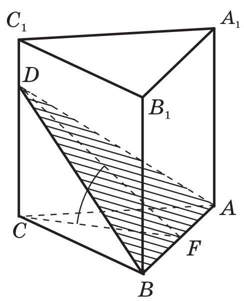
$$\alpha \cap \beta = c;\ \angle(\alpha;\ \beta) = \angle(a;\ b);$$
$$C \in c;\ a \perp c;\ b \perp c;$$
$$a \subset \alpha,\ b \subset \beta.$$



2. Возьмем точку $A \in \alpha$; $A \notin c$; опустим из нее перпендикуляр на прямую c и плоскость β: $AB \perp c$; $AA_1 \perp \beta$. Соединим точки B и A_1: $A_1B \perp c$ по теореме о трех перпендикулярах; $\angle ABA_1$ — угол между α и β.

П р и м е р. Через одну из сторон основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом φ к основанию, отсекающая от призмы пирамиду объемом V. Найдите площадь образовавшегося треугольного сечения.

Решение. Обозначим искомую площадь через S, площадь основания — через S_0, а сторону правильного ΔABC, лежащего в основании — через a. Тогда $S = \dfrac{S_0}{\cos\varphi}$, причем



$S_0 = S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Из ΔABC его высота равна: $CF = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного ΔCDF имеем: $CD = CF \cdot \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

По условию $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_0 \cdot CD$.

Тогда

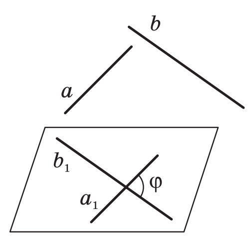
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^3 \operatorname{tg}\varphi}{8} \Leftrightarrow a^3 = \frac{8V}{\operatorname{tg}\varphi} = 8V \cdot \operatorname{ctg}\varphi \Leftrightarrow a = 2 \cdot \sqrt[3]{V \cdot \operatorname{ctg}\varphi}.$$

Значит, $S = \dfrac{S_0}{\cos\varphi} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} : \cos\varphi = a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi} = (2 \cdot \sqrt[3]{V \cdot \operatorname{ctg}\varphi})^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi} =$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2\cos^2\varphi}{\cos^3\varphi\sin^2\varphi}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{\cos\varphi\sin^2\varphi}}.$$

Ответ: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\cos\varphi\sin^2\varphi}}$.

Угол между скрещивающимися прямыми

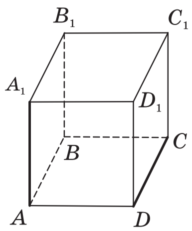


Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся прямым.

Если угол между скрещивающимися прямыми 90°, то они называются **перпендикулярными:**

$$a \parallel a_1,\ b \parallel b_1,$$
$$\angle(a;\ b) = \angle(a_1;\ b_1) = \varphi,$$
$$0° < \varphi < 90°.$$

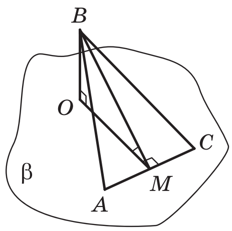
П р и м е р 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите угол между прямыми AA_1 и DC.



Решение. Прямые AA_1 и DC — скрещивающиеся ($DC \subset (ABCD)$, $AA_1 \cap (ABCD) = A$, $A \notin DC$). $DD_1 \parallel AA_1$, тогда $\angle D_1DC = 90°$ — искомый угол.

Ответ: 90°.

П р и м е р 2. Сторона AC равностороннего ΔABC лежит в плоскости β, а основание перпендикуляра, проведенного из точки B к плоскости β, удалено от AC на 6 см. Найдите угол между плоскостями ABC и β, если $AB = 8\sqrt{3}$ см.



Решение. Проведем $OM \perp AC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $BM \perp AC$, т. е. $\angle BMO$ — угол между плоскостями ABC и β. OM — расстояние от точки O до прямой AC, значит, $OM = 6$ см.

В правильном ΔABC высота

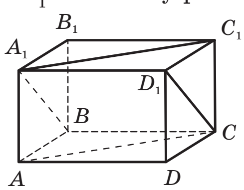
$$BM = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 12 \text{ см}.$$

Из ΔBOM ($\angle BOM = 90°$):

$$\cos\angle BMO = \frac{OM}{BM} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};\ \angle BMO = 60°.$$

Ответ: 60°.

П р и м е р 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны ребра: $AB = 2a$, $BC = 3a$, $AA_1 = a$. Чему равны углы между прямыми: 1) AB и CD_1; 2) AC и A_1B_1?



Решение. 1) Прямые AB и CD_1 — скрещивающиеся, тогда угол между ними равен углу между прямыми AB и BA_1, так как $CD_1 \parallel BA_1$. Из ΔAA_1B:

$$\operatorname{tg}\angle ABA_1 = \frac{AA_1}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

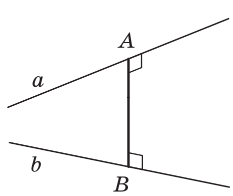
следовательно, $\angle ABA_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

2) Прямые AC и A_1B_1 — скрещивающиеся, значит, угол между ними равен углу между пересекающимися прямыми A_1C_1 и A_1B_1, тогда из $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\operatorname{tg}\angle B_1A_1C_1 = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \frac{BC}{AB} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2},\ \text{следовательно,}\ \angle B_1A_1C_1 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

Ответ: 1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

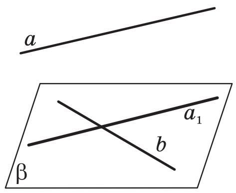


Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Она равна расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые:

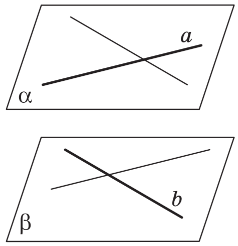
$$AB \perp a,\ AB \perp b;\ \rho(a;\ b) = AB.$$

Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми



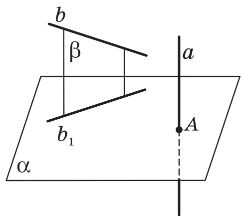
Проводим через прямую b плоскость $\beta \parallel a$:

$$\rho(a;\ b) = \rho(a;\ \beta).$$



Проводим через прямые a и b параллельные плоскости $\alpha \parallel \beta$:

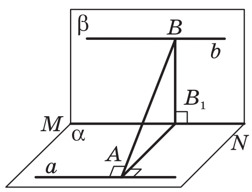
$$\rho(a;\ b) = \rho(\alpha;\ \beta).$$



Проводим плоскость $\alpha \perp a$ и проецируем прямые a и b на эту плоскость: $a \to A$; $b \to b_1$:

$$\rho(a;\ b) = \rho(A;\ b_1).$$

П р и м е р 1. Две взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN, прямая $b \subset \beta$ и $b \parallel MN$. Расстояние от a до MN равно 45 мм, а от b до MN — 60 мм. Найдите расстояние между прямыми a и b.



Решение.

1. $b \parallel MN$ и $a \parallel MN \Rightarrow a \parallel b$.

2. $B \in b$, $BB_1 \perp MN$; BB_1 — расстояние от прямой MN до B; $BB_1 = 60$ мм. По теореме о прямой, которая лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, $BB_1 \perp \alpha$.

3. $B_1B \perp \alpha$; B_1A — расстояние от a до MN, $B_1A = 45$ мм.

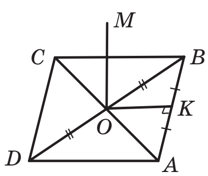
4. Соединим точки A и B. AB_1 — проекция наклонной AB на плоскость α. Но $a \perp AB_1$, тогда $a \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах; AB — искомое расстояние.

5. Из ΔBB_1A ($\angle BB_1A = 90°$):

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2 = 45^2 + 60^2 = 5625$; $AB = 75$ мм.

Ответ: 75 мм.

П р и м е р 2. Через точку O — точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ — проведен перпендикуляр MO к его плоскости. $AD = 2a$. Найдите расстояние между AB и MO.



Решение. $AB \subset (ABC)$, $MO \cap (ABC) = O$; $O \notin AB$.

Тогда AB и MO — скрещивающиеся прямые; KO — средняя линия ΔABD и $KO \parallel AD$.

Поскольку $AB \perp AD$, то $AB \perp KO$; т. к. $MO \perp (ABC)$, то $MO \perp KO$.

Таким образом, KO — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB и MO.

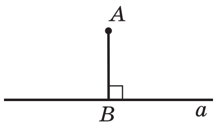
KO — искомое расстояние. $KO = \dfrac{1}{2}AD = a$.

Ответ: a.

Расстояние от точки до прямой

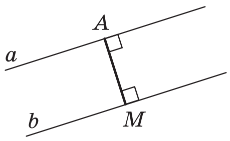
Расстояние между двумя точками равно длине отрезка, соединяющего эти точки:

$$\rho(A;\ B) = AB.$$



Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую:

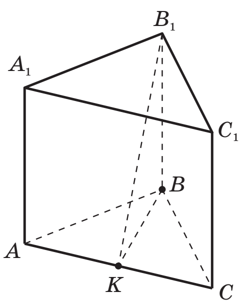
$$AB \perp a,$$
$$\rho(A;\ a) = AB.$$



Расстояние между параллельными прямыми — это расстояние от какой-либо точки одной прямой до другой.

$$a \parallel b;\ A \in a,\ AM \perp b;\ M \in b,$$
$$\rho(a,\ b) = AM.$$

Пример. В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1$ известно, что $AB = a$, $AA_1 = h$. Найдите расстояние от вершины B_1 до прямой AC.



Решение. Проведем $BK \perp AC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $B_1K \perp AC$. Следовательно, B_1K — расстояние от вершины B_1 до прямой AC.

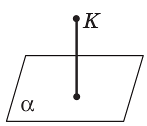
Из треугольника ABK имеем: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}}$.

Из треугольника BB_1K имеем:

$$B_1K = \sqrt{BB_1^2 + BK^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}{2}.$$

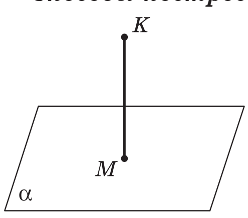
Ответ: $\dfrac{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}{2}$.

Расстояние от точки до плоскости

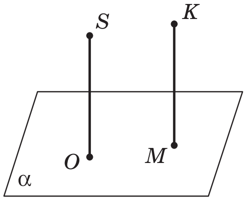


Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

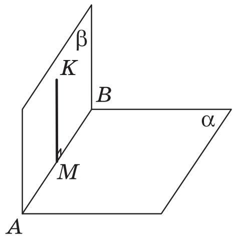
Способы построения



Проводим $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$).
$KM = \rho(K;\ \alpha)$.

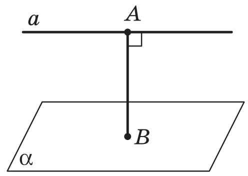


$SO \perp \alpha$. Проводим $KM \parallel SO$. Тогда $KM \perp \alpha$ и $KM = \rho(K;\ \alpha)$.



Проводим через точку K плоскость $\beta \perp \alpha$ (β пересекает α по AB). Проводим $KM \perp AB$. Тогда $KM \perp \alpha$ и $KM = \rho(K;\ \alpha)$.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью



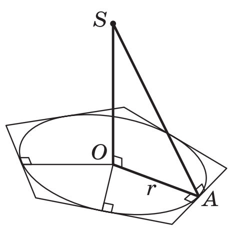
Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости называется расстоянием от произвольной точки этой прямой до плоскости:

$$a \parallel \alpha,\ A \in a;\ \rho(a;\ \alpha) = \rho(A;\ \alpha),$$
$$\rho(a;\ \alpha) = AB.$$

Частные случаи нахождения расстояний от точки до плоскости (до прямой)

В задачах школьного курса геометрии часто встречаются задачи, в которых необходимо найти расстояние от точки до плоскости при условии, что точка равноудалена от сторон многоугольника или от его вершин.

Опорная задача 1. Свойство точки, **равноудаленной от сторон многоугольника.**



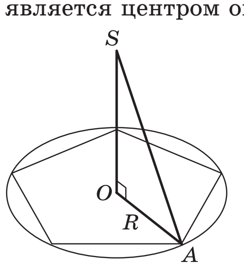
Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от его сторон,** то основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости многоугольника, является центром окружности, **вписанной** в многоугольник.

SA — расстояние от точки до стороны многоугольника.

SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника.

Опорная задача 2. Свойство точки, **равноудаленной от всех вершин многоугольника.**

Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от всех его вершин,** то основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости многоугольника, является центром окружности, **описанной** около многоугольника.



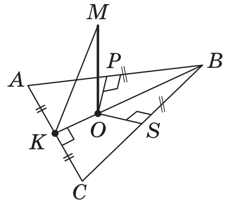
SA — расстояние от точки до вершины многоугольника.

SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника.

Понятно, что для решения этих задач необходимо знать формулы **зависимости стороны многоугольника и радиусов вписанной и описанной окружностей.** Приведем их в таблице.

R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.

Пример. Найдите расстояние от точки M до плоскости равнобедренного ΔABC, зная, что $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см, точка M равноудалена от каждой стороны на $8\frac{2}{3}$ см.



Решение. По условию задачи точка M равноудалена от всех сторон ΔABC, поэтому точка O одинаково удалена от всех сторон ΔABC и является центром окружности, вписанной в этот треугольник, OK — ее радиус.

1. Найдем площадь ΔABC: $p = \dfrac{13+13+10}{2} = 18$ (см);

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{18 \cdot (18-13) \cdot (18-13) \cdot (18-10)} = 60\ (\text{см}^2).$$

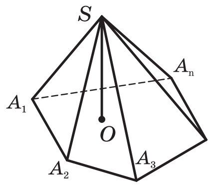
2. Найдем $OK = r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} = \dfrac{60}{18} = \dfrac{10}{3}$ (см).

3. Из ΔMOK ($\angle MOK = 90°$): $MO^2 = MK^2 - OK^2 = \left(8\dfrac{2}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 = \dfrac{36 \cdot 16}{9}$; $MO = 8$ см.

Ответ: 8 см.

5.5.2. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания.



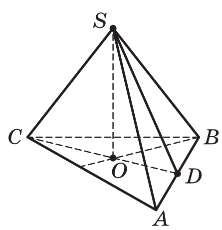
$A_1A_2...A_n$ — **основание** пирамиды; ΔSA_1A_2, ΔSA_2A_3, ..., ΔSA_nA_1 — **боковые грани**; S — **вершина** пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из ее вершины к плоскости основания.

SO — высота пирамиды.

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а основание высоты (проекция вершины) совпадает с центром этого многоугольника.



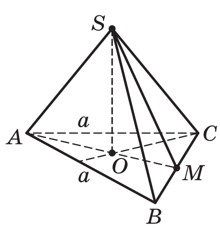
Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая высоту.

Апофемой называется высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

$SD \perp AB$, SD — апофема правильной треугольной пирамиды $SABC$.

Замечание. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с серединой ребра основания, — апофема. Все апофемы правильной пирамиды равны.

Некоторые виды правильных пирамид

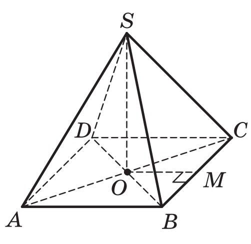


Треугольная пирамида

ΔABC — правильный. O — точка пересечения медиан, высот, биссектрис, центр вписанной и описанной окружностей.

$$R = AO = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ r = OM = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

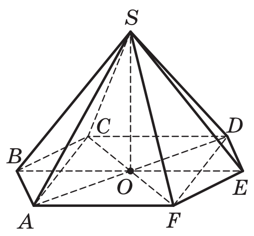


Четырехугольная пирамида

$ABCD$ — квадрат. O — точка пересечения диагоналей, центр вписанной и описанной окружностей.

$$R = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2};\quad r = OM = \frac{a}{2};$$

$$S_{ABCD} = a^2.$$



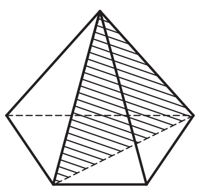
Шестиугольная пирамида

$ABCDEF$ — правильный шестиугольник. O — центр вписанной и описанной окружностей.

$$R = a;\ r = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Сечение пирамиды плоскостью. Усеченная пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды. Объем пирамиды

Сечение пирамиды плоскостью

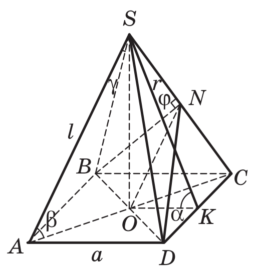


Диагональным сечением пирамиды называется сечение, которое проходит через два боковых ребра, не лежащих в одной грани.

Сечение пирамиды плоскостью, **параллельной основанию,** — многоугольник, подобный многоугольнику основания.

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину, — треугольник.

Основные соотношения правильной пирамиды



$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида.

$AB = BC = CD = DA = a$ — сторона основания.

$\angle CDA = \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = 90°$.

$SA = SB = SC = SD = l$ — боковое ребро.

$SO = H$ — высота; $SK = k$ — апофема.

$\angle SKO = \alpha$ — линейный угол двугранного угла при основании (угол наклона боковой грани к плоскости основания).

$\angle SAO = \beta$ — угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Все боковые ребра равны и одинаково наклонены к основанию.

$\angle DSC = \gamma$ — плоский угол при вершине боковой грани.

$AO = R$ — радиус окружности, описанной около основания.

$OK = r$ — радиус окружности, вписанной в основание.

$ON \perp SC$, $\angle BND = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC.

$\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SAD$; боковые грани — равные равнобедренные треугольники, которые одинаково наклонены к основанию.

Основные формулы для правильной пирамиды

1. Боковая поверхность:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн.}} \cdot l = \frac{n}{2}al \quad \text{или} \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\alpha},$$

$\angle SKO = \alpha$ — угол наклона боковой грани к основанию.

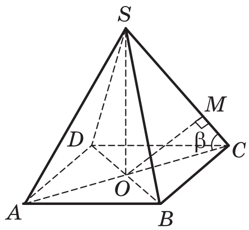
2. Полная поверхность:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = \frac{n}{2}al + S_{\text{осн.}}.$$

3. Объем:

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

П р и м е р. Расстояние от основания высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее бокового ребра равно a, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найдите боковое ребро пирамиды.



Решение. $SO \perp (ABCD)$, OC — проекция бокового ребра на плоскость основания.

$\angle SCO = \beta$.

Проведем $OM \perp SC$. OM — расстояние от точки O до бокового ребра SC. $OM = a$.

Из ΔOMC ($\angle OMC = 90°$): $OC = \dfrac{OM}{\sin\angle SCO} = \dfrac{a}{\sin\beta}$.

Так как OC лежит в плоскости $ABCD$, а $SO \perp (ABCD)$, то $SO \perp OC$. Из ΔSOC ($\angle SOC = 90°$):

$$SC = \frac{OC}{\cos\angle SCO} = \frac{a}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{2a}{\sin 2\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{2a}{\sin 2\beta}$.

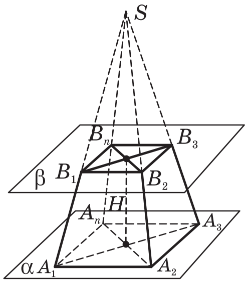
Соотношения между углами в правильной n-угольной пирамиде

α — угол между боковым ребром и плоскостью основания;
β — угол между боковой гранью и плоскостью основания;
γ — угол между смежными боковыми ребрами;
φ — угол между смежными боковыми гранями.

Углы	Соотношения	Связи между углами	Область изменения углов
α; φ	$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$		
α; γ	$\cos\alpha = \dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$	$\gamma < \pi - 2\alpha$	$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
α; β	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\dfrac{\pi}{n}$	$\alpha < \beta$	$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$
β; γ	$\cos\beta = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$		$0 < \gamma < \dfrac{2\pi}{n}$
β; φ	$\sin\beta = \dfrac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$	$\varphi > \pi - 2\beta$	$\pi - \dfrac{2\pi}{n} < \varphi < \pi$
γ; φ	$\cos\varphi = \dfrac{-\cos\frac{2\pi}{n} - \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$		

Усеченная пирамида

Усеченной пирамидой называется многогранник, который отсекается от пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей боковые ребра, а также размещен между плоскостью основания и плоскостью сечения.



$A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — основания усеченной пирамиды;

$A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани;

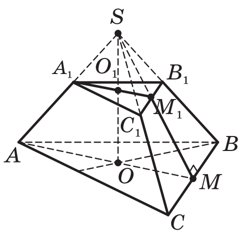
A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — боковые ребра.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Замечания.

1. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, пересекая ее, отсекает подобную пирамиду.
2. Все боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

Правильная усеченная пирамида



Усеченная пирамида называется **правильной**, если она получена пересечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию.

Свойства правильной усеченной пирамиды

1. Основания — правильные многоугольники.
2. Боковые грани — равные равнобокие трапеции.
3. Отрезок, соединяющий центры оснований, — высота (OO_1 — высота).
4. Высота боковой грани называется апофемой (MM_1 — апофема).

Основные формулы для правильной усеченной пирамиды

1. Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l,$$

где P_1, P_2 — периметры оснований, l — апофема.

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}_1} + S_{\text{осн.}_2},$$

где $S_{\text{осн.}_1}$ и $S_{\text{осн.}_2}$ — площади оснований.

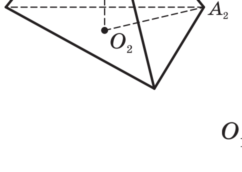
3. Объем произвольной усеченной пирамиды:

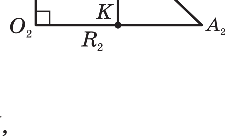
$$V = \frac{1}{3}H\left(S_{\text{осн.}_1} + \sqrt{S_{\text{осн.}_1} \cdot S_{\text{осн.}_2}} + S_{\text{осн.}_2}\right),$$

где H — высота пирамиды.

Решая задачи, в которых фигурируют **усеченные пирамиды,** полезно рассматривать при проведении вычислений фрагменты сечений пирамиды.

1. Фрагмент сечения, проходящего через боковое ребро и центры окружностей, описанных около оснований.





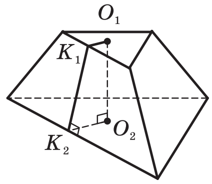
$$O_1O_2 = H,$$

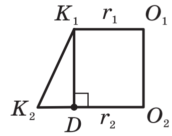
$O_1A_1 = R_1$ и $O_2A_2 = R_2$ — радиусы описанных окружностей;

$$KA_2 = R_2 - R_1,$$

$\angle A_2$ — угол наклона бокового ребра к плоскости нижнего основания.

2. Фрагмент сечения, проходящего через центры окружностей, вписанных в основания (r_1 и r_2).





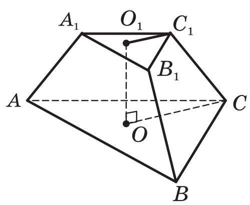
$$O_1O_2 = H,$$

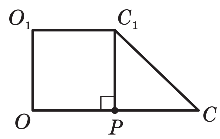
$O_1K_1 = r_1$ и $O_2K_2 = r_2$ — радиусы вписанных окружностей.

$$K_2D = r_2 - r_1,$$

$\angle K_2$ — линейный угол двугранного угла при нижнем основании.

Пример 2. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды — 4 дм и 1 дм. Боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту пирамиды.





Решение. В правильных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ O и O_1 — центры, а OC и O_1C_1 — радиусы описанных окружностей, тогда

$$OC = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \quad O_1C_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Проведем $C_1P \perp (ABC)$, $C_1P = OO_1$ — высота пирамиды.

$$PC = OC - O_1C_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

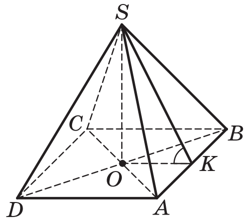
Из ΔC_1PC ($\angle C_1PC = 90°$): $C_1P^2 = C_1C^2 - PC^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1;$

$C_1P = 1.$

Ответ: 1 дм.

Угол между прямой и плоскостью

Пример. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна l и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите полную поверхность пирамиды.



Решение. Пусть $SABC$ — правильная пирамида, у которой $SK \perp AB$, $SK = l$, $\angle SKO = \alpha$, $SO \perp (ABC)$. Из ΔSOK:

$OK = SK \cdot \cos \angle SKO = l \cos \alpha.$

Так как $OK = \dfrac{1}{2}AB$, то

$AB = 2 \cdot OK = 2l \cos \alpha$

и тогда $S_{осн} = AB^2 = 4l^2 \cos^2 \alpha,$

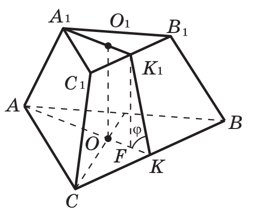
$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha} = \frac{4l^2\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = 4l^2\cos\alpha.$$

$S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 4l^2 \cos \alpha + 4l^2 \cos^2 \alpha = 4l^2 \cos \alpha(1 + \cos \alpha).$

Ответ: $4l^2 \cos \alpha(1 + \cos \alpha)$.

Угол между плоскостями

Пример. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$), угол между плоскостями боковой грани и основания равен φ. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.



Решение. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида , в которой $AB = a$, $A_1B_1 = b$. Проведем $AK \perp CB$, $A_1K_1 \perp C_1B_1$, тогда $\angle K_1KA = \varphi$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ — правильные $\Rightarrow OK = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $O_1K_1 = \dfrac{b}{2\sqrt{3}} = OF$, тогда

$$FK = OK - OF = \frac{a-b}{2\sqrt{3}}, \quad KK_1 = \frac{a-b}{2\sqrt{3}\cos\varphi}$$

и, значит, $S_{\text{бок}} = \dfrac{3a+3b}{2}\cdot\dfrac{a-b}{2\sqrt{3}\cos\varphi} = \dfrac{3(a^2-b^2)}{4\sqrt{3}\cos\varphi}$,

$$S_{\text{полн}} = \frac{3(a^2-b^2)}{4\sqrt{3}\cos\varphi} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{\cos\varphi} + a^2 + b^2\right) =$$

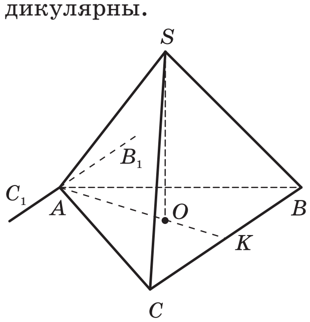
$$= \frac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi}(a^2(1+\cos\varphi) - b^2(1-\cos\varphi)) = \frac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi}\left(2a^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2b^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\cos\varphi}\left(a^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - b^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\varphi}\left(a^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} - b^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Угол между скрещивающимися прямыми

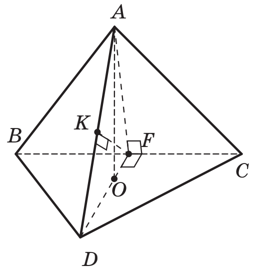
Пример. Докажите, что непересекающиеся ребра правильной треугольной пирамиды перпендикулярны.



Решение. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида. $SO \perp (ABC)$. Докажем, что $CB \perp AS$. Проведем $AK \perp CB$ и $C_1B_1 \parallel CB$, тогда $AK \perp C_1B_1$ и, согласно теореме о трех перпендикулярах, $AS \perp C_1B_1$, значит, прямые CB и AS перпендикулярны: $CB \perp AS$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пример. Дан тетраэдр $ABCD$, длина каждого ребра которого равна a. Найдите расстояние между прямыми AD и BC.



Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Проведем $AO \perp (BCD)$, поскольку $AB = AD = AC$, то O — центр ΔBCD. Проведем $DF \perp BC$, тогда $AF \perp$ $\perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах) и, значит, $(AFD) \perp BC$. Следовательно, расстояние между прямыми BC и AD равно расстоянию FK, где $FK \perp AD$. Учтем, что $AF = FD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AK = KD = \dfrac{a}{2}$.

Из ΔFKD: $FK = \sqrt{FD^2 - DK^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

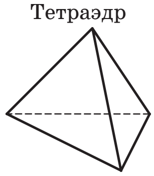
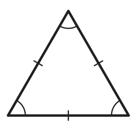
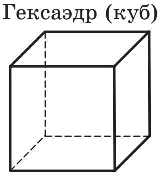
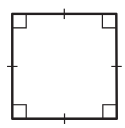
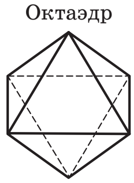
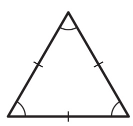
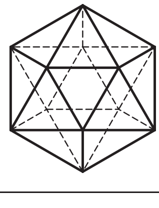
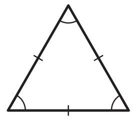
Ответ: $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

5.5.3. Правильные многогранники. Сечение плоскостью. Площадь боковой и полной поверхностей. Объем

Многогранник называется правильным, если все его грани — равные друг другу правильные многоугольники, к каждой вершине примыкает одинаковое количество граней и двугранные углы между смежными гранями одинаковы.

Существует ровно **пять** правильных выпуклых многогранников (их называют **телами Платона**). Это тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Правильные многогранники

Название, общий вид	Вид основания	Количество граней	Количество вершин	Количество ребер
Тетраэдр 		4	4	6
Гексаэдр (куб) 		6	8	12
Октаэдр 		8	6	12
Икосаэдр 		20	12	30

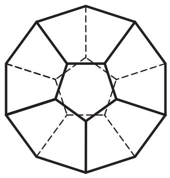
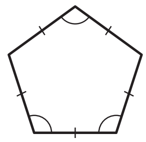
Название, общий вид	Вид основания	Количество граней	Количество вершин	Количество ребер
Додекаэдр 		12	20	30

Таблица параметров правильных многогранников

Введем обозначения:

a — ребро многогранника;

φ_1 — угол, под которым ребро многогранника видно из центра описанной сферы;

φ — угол между смежными боковыми гранями;

R — радиус описанного шара, r — радиус вписанного шара;

S — площадь поверхности;

V — объем.

Параметры	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$\cos\varphi_1$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\cos\varphi$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$
R	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
r	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$	$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$
S	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$5a^2\sqrt{3}$
Сумма плоских углов при вершине	180°	270°	240°	324°	300°
V	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	a^3	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.5. «Многогранники»

5.5.1. Призма

Часть 1

Ответом на задания В1–В17 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Сколько диагоналей можно провести в 5-угольной призме?

B2

B2. Найдите сумму плоских углов 6-угольной призмы.

B3

B3. Найдите сумму всех двугранных углов 3-угольной призмы.

B4

B4. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 4 и наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь диагонального сечения.

B5

B5. Ребро куба равно $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от диагонали куба к боковому ребру, которое не пересекает ее.

B6

B6. Найдите площадь поверхности куба, если площадь диагонального сечения куба равна $\sqrt{2}$.

B7

B7. Найдите объем куба, если площадь полной поверхности куба равна 24.

B8

B8. Найдите объем наклонной треугольной призмы, если площадь боковой грани равна 10, а расстояние от этой грани до противоположного ребра равно 4.

B9

B9. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна 2 см и образует с боковым ребром угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

B10. Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 6 см, две боковые грани ее взаимно перпендикулярны и имеют площади 24 см^2 и 30 см^2. Найдите объем призмы.

B10

B11. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

B11

B12. Найдите высоту призмы, если основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, диагонали боковых граней призмы равны 4 см, 7 см и 8 см.

B12

B13. Основание прямой призмы — прямоугольник со стороной 8 см и диагональю 10 см. Боковое ребро равно 10 см. Найдите полную поверхность призмы.

B13

B14. Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом 60° и большей диагональю $6\sqrt{3}$. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

B14

B15. Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры дна которого 5×20 м, глубина — 3 м. Найдите время (в минутах), за которое бассейн наполнится водой на высоту 2,8 м, если скорость подачи воды 7 м^3/мин.

B15

B16. Прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого равна 5 см, 7 см и 9 см, составлен из кубиков, длина ребра которых равна 1 см. Сколько придется удалить кубиков, чтобы убрать весь внешний слой толщиной в один кубик?

B16

B17. Площади граней прямоугольного параллелепипеда равны 20 см^2, 24 см^2 и 30 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

B17

B18. Для отопительной системы дома нужны радиаторы из расчета три радиатора на 5 м^3. Какое количество радиаторов нужно заказать, если новый дом имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами 15 м, 18 м и 25 м?

B18

5.5.2. Пирамида

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 6 см, а боковая поверхность вдвое больше площади основания.

B2

B2. Найдите высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны ее основания равны 6 см и 3 см, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

B3

B3. Найдите объем (V) правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если боковое ребро равно 3 см, стороны оснований равны 5 см и 1 см. В ответ запишите значение $3V$.

B4

B4. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен $90°$, а радиус окружности описанной вокруг ее боковой грани, равен 6.

B5

B5. Боковые ребра треугольной пирамиды равны 3 см, 4 см и 5 см и взаимно перпендикулярны. Найдите объем пирамиды.

B6

B6. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 2.

B7

B7. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание 6 см, высота 9 см, боковые ребра пирамиды равны между собой и каждое ребро равно 13 см. Найдите высоту пирамиды.

B8

B8. Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt[4]{3}$ и составляет половину стороны основания. Найдите площадь сечения, которое проходит через две апофемы.

B9

B9. Найдите высоту правильной треугольной усеченной пирамиды, если стороны оснований равны 8 см и 5 см, а угол наклона бокового ребра к большему основанию равен $60°$.

B10. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, боковая сторона — 10 см. Боковые грани образуют с основанием двугранные углы в 45°. Найдите высоту пирамиды.

B10

B11. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 2 : 3 (считая от вершины). Найдите площадь сечения, если известно, что она меньше площади основания на 84 см^2.

B11

B12. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, диагональ основания которой равна $8\sqrt{2}$ см, апофема пирамиды равна 5 см.

B12

B13. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6. Найдите полную поверхность, если угол между апофемой и высотой пирамиды равен 30°.

B13

B14. Вычислите объем многогранника, все вершины которого лежат в центрах граней прямоугольного параллелепипеда, размеры которого 3, 4 и 5.

B14

B15. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

B15

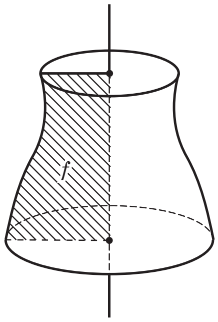
B16. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 5, 6 и 8, а все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Вычислите объем пирамиды.

B16

B17. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 6. Точка K — середина ребра SC. Найдите объем пирамиды $KBCD$.

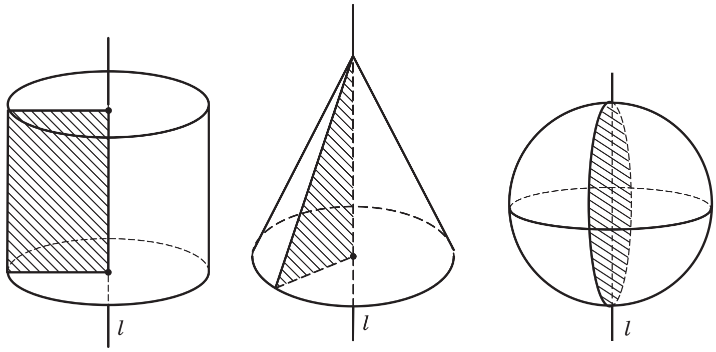
B17

5.6. Тела вращения



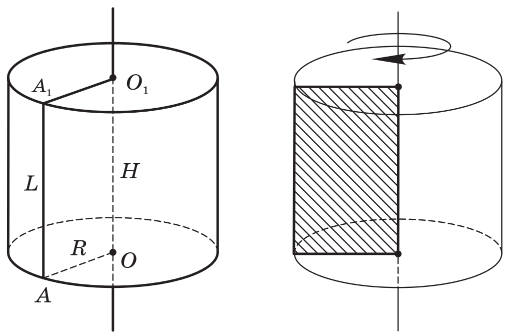
Рассмотрим в пространстве прямую l и некоторую плоскую фигуру F, которая лежит в одной плоскости с прямой l. Каждая точка фигуры F будет описывать при вращении вокруг прямой l окружность или лежать на этой прямой. Объединение всех таких окружностей и точек фигуры F, лежащих на прямой l, называется **фигурой вращения**, а прямую l называют **осью вращения**.

Например: прямой круговой цилиндр, конус, шар — фигуры вращения, полученные вращением прямоугольника, прямоугольного треугольника, круга относительно одной стороны, одного катета, одного диаметра соответственно.



5.6.1. Прямой круговой цилиндр

Цилиндром (круговым цилиндром) называется тело, состоящее из двух кругов (оснований цилиндра), которые не лежат в одной плоскости и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, которые соединяют соответствующие точки этих кругов.



Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей оснований цилиндра, называют образующими цилиндра.

$AA_1 = L$ — образующая цилиндра.

Прямым круговым цилиндром называется цилиндр, образующие которого перпендикулярны плоскости основания (далее рассматриваем только прямые круговые цилиндры, и под словом «цилиндр» рассматриваются только они).

Точки O и O_1 — центры окружностей — **оснований цилиндра**, OO_1 — **ось цилиндра**.

Высота цилиндра H — длина его образующей или расстояние между плоскостями оснований, $L = H$.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

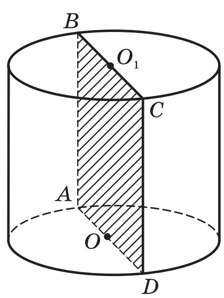
Цилиндр **является одним из тел вращения**, т. к. может быть получен вращением прямоугольника около одной из его сторон.

Сечение цилиндра плоскостью. Площадь боковой и полной поверхности цилиндра. Объем цилиндра

Свойства цилиндра

1. Основания цилиндра — равные круги, которые лежат в параллельных плоскостях.
2. Образующие цилиндра параллельны, равны и перпендикулярны плоскости основания.
3. Отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра, равен образующей (высоте).
4. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, — прямоугольник.
5. Сечение цилиндра, которое не пересекает основания и не параллельно основаниям, — эллипс.

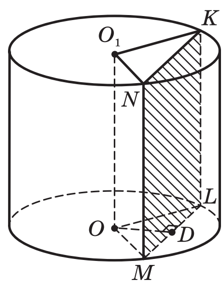
Сечение цилиндра плоскостями



1. ***ABCD*** — **осевое сечение цилиндра** (сечение, проходящее через ось OO_1).

$ABCD$ — прямоугольник, где $AD = d_{осн.} = 2R$; $AB = H$.

Если $ABCD$ — квадрат, то цилиндр называется **равносторонним**.

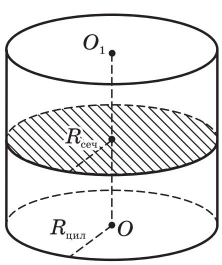


2. **Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси.**

$KLMN$ — прямоугольник;

$(KLM) \parallel OO_1$.

$KL = MN = L$ — образующие цилиндра; $OM = OL = R$ — радиус цилиндра, OD — расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.



3. **Сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям.**

Плоскость, параллельная основаниям, пересекает его боковую поверхность по окружности, которая равна окружности основания:

$$R_{сеч.} = R_{цил.}$$

Основные формулы для цилиндра

Для цилиндра с радиусом R и высотой H:

1. Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH.$$

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

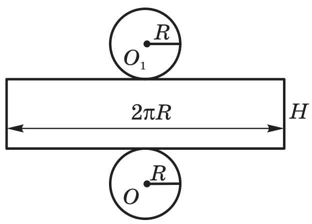
3. Объем:

$$V = \pi R^2 H.$$

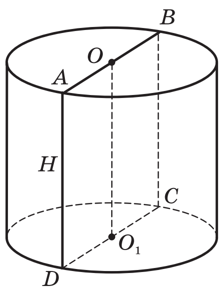
Развертка цилиндра

Если поверхность цилиндра разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность вместе с основаниями лежала в одной плоскости, то на этой плоскости получится фигура, которая называется **разверткой цилиндра**.

Она состоит из прямоугольника и двух кругов (оснований цилиндра).



П р и м е р. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения равна S. Найдите полную поверхность цилиндра.



Решение. Пусть $S_{\text{осн.}} = Q$ и $S_{ABCD} = S$.

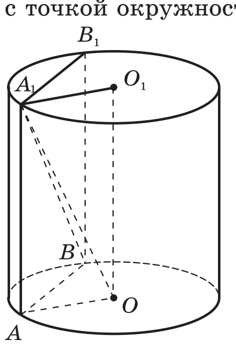
Обозначим $OA = R$ и $AD = H$, тогда $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(H + R)$. Но, согласно условию $2RH = S$, $S_{\text{бок.}} = 2\pi RH$, тогда $S_{\text{бок.}} = \pi S$.

Тогда $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2Q = \pi S + 2Q$.

Ответ: $\pi S + 2Q$.

Угол между прямой и плоскостью

П р и м е р. Параллельно оси цилиндра, площадь боковой поверхности которого равна Q, проведена секущая плоскость. Диагональ образованного сечения наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь сечения, если отрезок, который соединяет центр основания цилиндра с точкой окружности второго основания, наклонен к плоскости основания под углом α.



Решение. Пусть AA_1B_1B — данное сечение, OO_1 — ось цилиндра, тогда $S_{\text{бок}} = Q$, $\angle A_1BA = \beta$, $\angle O_1A_1O = \alpha$. Пусть R — радиус основания цилиндра, Тогда из ΔO_1A_1O: $H = OO_1 = R\operatorname{tg}\alpha$.

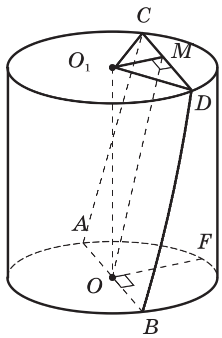
Так как $Q = 2\pi RH = 2\pi R^2 \operatorname{tg}\alpha$, то $R^2 = \dfrac{Q}{2\pi \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{Q\operatorname{ctg}\alpha}{2\pi}$.

Из ΔABA_1: $AB = AA_1 \cdot \operatorname{ctg}\beta = OO_1 \operatorname{ctg}\beta = R\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

$$S_{ABB_1A} = AB \cdot AA_1 = R^2 \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{Q}{2\pi\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{Q\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{2\pi}.$$

Ответ: $\dfrac{Q\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{2\pi}$.

Угол между плоскостями



П р и м е р. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α к основанию, пересекает основание по хорде, равной h и стягивающей дугу β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение. Пусть плоскость проходит через O и CD, тогда она пересекает нижнее основание по диаметру AB. Пусть $OF \perp AB$, $CM = MD$, $O_1M \perp CD$, тогда $\angle MOF = \angle O_1MO = \alpha$, $CD = h$, $\angle CO_1D = \beta$. Площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi RH$, где $R = O_1C$, $H = OO_1$. Учитывая, что

$$CM = \frac{1}{2}CD = \frac{h}{2}, \quad \angle CO_1M = \frac{1}{2}\angle CO_1D = \frac{\beta}{2}.$$

Из ΔO_1CM: $O_1C = \dfrac{CM}{\sin\angle CO_1M} = \dfrac{h}{2\sin\frac{\beta}{2}}$;

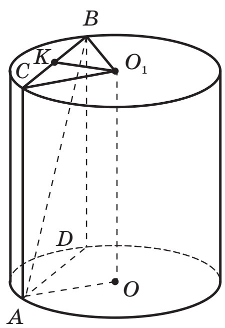
$$O_1M = CM \operatorname{ctg}\angle CO_1M = \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Из ΔOO_1M: $OO_1 = O_1M \operatorname{tg}\angle O_1MO = \dfrac{h}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Тогда $S = 2\pi\cdot\dfrac{h}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\dfrac{h}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\pi h^2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{\pi h^2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Угол между скрещивающимися прямыми



П р и м е р. Концы отрезка лежат на окружностях оснований равностороннего цилиндра (осевое сечение — квадрат), угол между радиусами, проведенными в концы отрезка, равен α. Найдите угол между этим отрезком и осью цилиндра.

Решение. Пусть OO_1 — ось цилиндра, AB — данный отрезок. Угол между радиусами OA и O_1B равен углу CO_1B, т. е. $\angle CO_1B = \alpha$. Искомый угол между отрезком AB и осью OO_1 равен углу ABD. Проведем $O_1K \perp BC$.

Из ΔCO_1K:

$$CK = CO_1\cdot\sin\angle CO_1K = CO_1\sin\left(\frac{1}{2}\angle CO_1B\right) = CO_1\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $CB = 2CK = 2CO_1\sin\dfrac{\alpha}{2}$, то $AD = 2CO_1\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

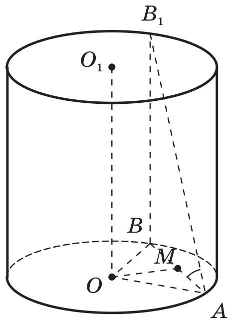
Из ΔABC, учитывая, что $DB = 2CO_1$, имеем:

$$\operatorname{tg}\angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{2CO_1\sin\frac{\alpha}{2}}{2CO_1} = \sin\frac{\alpha}{2}, \text{ значит,}$$

$$\angle ABD = \operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми



Пример. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра — квадрат.

Решение. Пусть $AB_1 = l$, $\angle B_1AB = \alpha$.

Из ΔB_1BA имеем: $BB_1 = AB_1 \cdot \sin\angle B_1AB = l\sin\alpha$.

$AB = AB_1\cos\angle B_1AB = l\cos\alpha$, тогда $OB = OA = \frac{l}{2}\sin\alpha$, $AM = \frac{l}{2}\cos\alpha$.

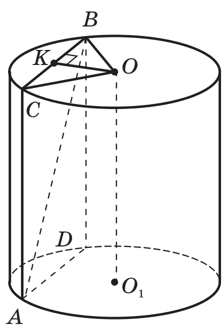
Из ΔOMA:

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4}\sin^2\alpha - \frac{l^2}{4}\cos^2\alpha} = \frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Так как $OO_1 \parallel BB_1$, то $OO_1 \parallel (ABB_1)$, и, значит, расстояние от прямой AB_1 до оси OO_1 равно расстоянию от плоскости ABB_1 до оси OO_1, а расстояние от плоскости ABB_1 до прямой OO_1 равно длине перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABB_1, т. е. $OM = \frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Ответ: $\frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Расстояние от точки до прямой



Пример. Высота цилиндра H, радиус основания R. Концы данного отрезка лежат на окружностях обоих оснований, длина отрезка равна l. Найдите расстояние от этого отрезка до оси цилиндра.

Решение. Пусть $OO_1 = H$, $O_1A = R$, $AB = l$. Через отрезок AB проведем сечение цилиндра $ABCD$, которое параллельно оси цилиндра OO_1. Из ΔABC:

$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - H^2}$. Проведем $OK \perp CB$.

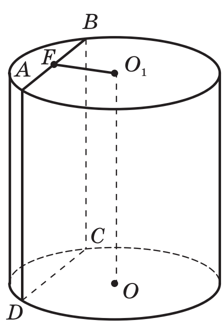
Тогда $CK = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - H^2}$. Далее из ΔKCO:

$$KO = \sqrt{CO^2 - CK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(l^2 - H^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}.$$

Учитывая, что расстояние между скрещивающимися прямыми AB и OO_1 равно расстоянию между прямой OO_1 и плоскостью ABC, получаем, что искомое расстояние равно $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}$.

Расстояние от точки до плоскости



Пример. Радиус цилиндра равен R, высота H, площадь сечения, параллельного оси, равна S. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?

Решение. Пусть $ABCD$ — сечение цилиндра . $S_{ABCD} = S$, OO_1 — ось цилиндра, $OO_1 = AD = H$, $O_1A = O_1B = R$.

Так как $S = AB \cdot AD$, то $AB = \frac{S}{AD} = \frac{S}{H}$. Расстояние между плоскостью ABC и прямой OO_1 (где $OO_1 \parallel ABC$) равно длине перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на плоскость ABC.

Проведем $O_1F \perp AB$. Учитывая, что $AF = FB = \frac{1}{2}AB = \frac{S}{2H}$, из ΔAFO_1 получаем:

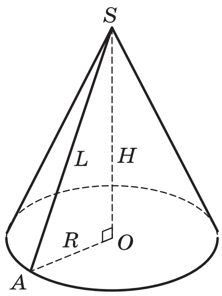
$FO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AF^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{S^2}{4H^2}} = \dfrac{\sqrt{4H^2R^2 - S^2}}{2H}$. Это и есть искомое расстояние.

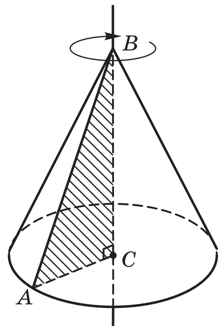
Ответ: $\dfrac{\sqrt{4H^2R^2 - S^2}}{2H}$.

5.6.2. Прямой круговой конус

Конусом (круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга (основания конуса), точки, которая не лежит в плоскости этого круга (вершины конуса), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называют **образующими конуса**.





Прямым круговым конусом называется конус, в котором прямая, соединяющая вершину с центром основания, перпендикулярна плоскости основания (вершина проецируется в центр основания) (далее под словом «конус» понимаем прямой круговой конус).

Круг с центром O — **основание** конуса, $L = SA$ — **образующая** конуса, S — **вершина** конуса, $R = AO$ — **радиус** основания конуса.

Прямая SO — **ось** конуса, отрезок $SO = H$ — **высота** конуса.

Конус является **телом вращения**, т. к. при вращении прямоугольного треугольника около одного из катетов как оси образуется **конус**.

Сечение плоскостью. Усеченный конус. Площадь боковой и полной поверхности конуса. Объем конуса

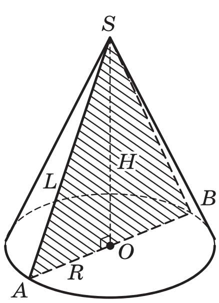
Свойства конуса

1. Основание конуса — круг.

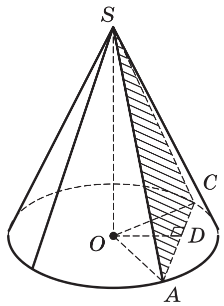
2. Основание высоты конуса — центр основания конуса.

3. Образующие конуса равны и составляют одинаковые углы с плоскостью основания конуса и одинаковые углы с высотой.

Сечение конуса плоскостями

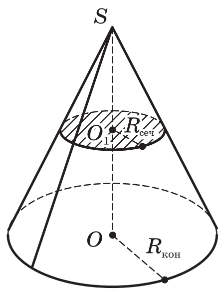


1. **Сечение конуса, проходящее через его ось, — осевое сечение** — равнобедренный треугольник SAB, в котором $SA = SB = L$ — образующие конуса; $AB = 2R$.



2. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину:

ΔASC — равнобедренный, $AS = SC = L$ — образующие; AC — хорда; $OA = OC = R$ — радиус основания; OD — расстояние от основания высоты конуса до хорды AC.



3. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию.

Плоскость, параллельная основанию конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса:

$$\frac{R_{\text{сеч.}}}{R_{\text{кон.}}} = \frac{SO_1}{SO}.$$

Основные формулы для конуса

Для конуса с радиусом основания R, высотой H и образующей L:

1. Площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок.}} = \pi RL.$$

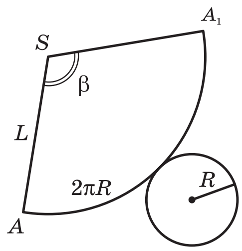
2. Площадь полной поверхности конуса:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R).$$

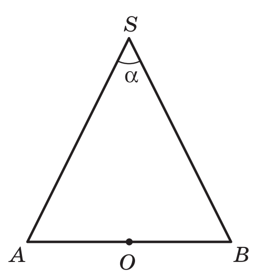
3. Формула объема:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Развертка конуса



Если поверхность конуса разрезать по образующей и окружности основания и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность и основание лежали в одной плоскости, то на плоскости получится фигура, которая называется **разверткой конуса**. Развертка конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса, и круга основания.



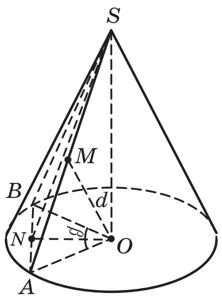
Пусть угол при вершине осевого сечения конуса ASB равен α, а $\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развертке конуса.

Справедливы соотношения:

$$\beta = 2\pi \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha = 2\arcsin\frac{\beta}{2\pi}$$

П р и м е р. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которую видно из вершины под углом α, а из центра основания — под углом β. Найдите боковую поверхность конуса, если расстояние от центра его основания до середины образующей равно d.



Решение. ΔSAB — сечение конуса плоскостью, $SB = SA$, M — середина образующей SA, SO — высота, $\angle ASB = \alpha$, $\angle AOB = \beta$.

$OM = d$, боковая поверхность конуса $S_{\text{бок.}} = \pi RL$, где

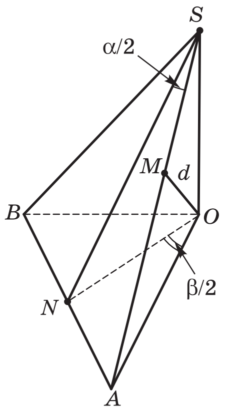
$R = OA$, $L = SA$.

В ΔSOA ($\angle SOA = 90°$): середина M — центр описанной окружности, т. е. $MO = MA = MS$, т. е. $SA = 2d$.

Проведем $SN \perp AB$, по теореме о трех перпендикулярах $ON \perp AB$.

$SA = SB$, тогда SN — биссектриса $\angle ASB$, а ON — биссектриса $\angle AOB$, т. к. $AO = OB$.

Из ΔSNA:



$$NA = SA\sin\frac{\alpha}{2} = 2d\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Из ΔONA:

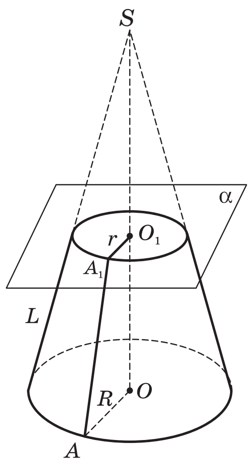
$$OA = \frac{NA}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2d\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

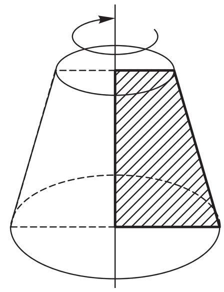
$$S_{\text{бок.}} = \pi\cdot OA\cdot SA = \pi\cdot\frac{2d\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot 2d = \frac{4\pi d^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi d^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

Усеченный конус

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.





Основанием усеченного конуса называется основание полного конуса, из которого получен усеченный, и часть секущей плоскости, ограниченная конической поверхностью (круг).

Круги с центрами O и O_1 — основания;

$L = AA_1$ — образующая усеченного конуса;

$OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований усеченного конуса.

Усеченный конус может быть образован вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной ее основаниям.

Свойства усеченного конуса

1. Основания — круги.
2. Отрезок, соединяющий центры оснований, перпендикулярен плоскостям оснований.
3. Образующие равны и составляют одинаковые углы с плоскостью основания.
4. Осевое сечение — равнобокая трапеция.

Основные формулы для усеченного конуса

Для усеченного конуса с радиусами оснований R и r, высотой H и образующей L:

1. Боковая поверхность:

$$S_{\text{бок.}} = \pi(R + r)L.$$

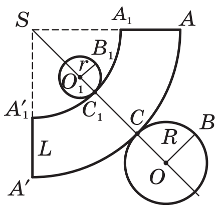
2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}_1} + S_{\text{осн.}_2} = \pi(R + r)L + \pi(R^2 + r^2).$$

3. Объем:

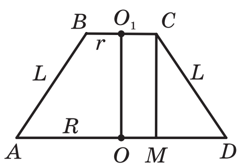
$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2).$$

Развертка усеченного конуса

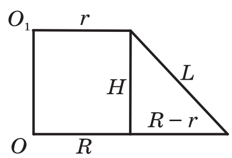


Если поверхность усеченного конуса разрезать по образующей и окружностям и развернуть так, чтобы боковая поверхность с основаниями лежали в одной плоскости, то получим фигуру, называемую **разверткой** усеченного конуса.

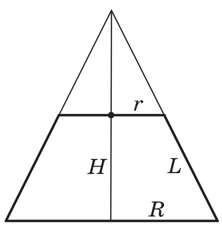
Решая задачи, в условии которых фигурирует усеченный конус, обычно рассматривают какую-либо из трех фигур:



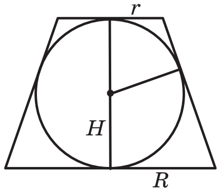
1) **осевое сечение** усеченного конуса — равнобокую трапецию $ABCD$, $AB = CD = L$, $O_1C = r$; $OD = R$; $MD = R - r$; $AM = R + r$;



2) **прямоугольную трапецию**, которая при вращении образует данный усеченный конус;



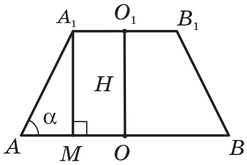
3) **осевое сечение полного конуса**, из которого получен данный усеченный конус;



4) **полезный факт:** если в осевое сечение усеченного конуса можно вписать окружность, то его высота есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований.

$$H = \sqrt{D \cdot d}, \text{ где } D = 2R, \ d = 2r$$

П р и м е р. Образующая усеченного конуса наклонена к плоскости большего основания под углом α. Найдите объем конуса, если радиусы оснований R и r.



Решение. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса — равнобокую трапецию AA_1B_1B. $AA_1 = B_1B = L$ — образующие, $AO = R$, $A_1O_1 = r$. $\angle A_1AO = \alpha$.

Проведем $A_1M \perp AB$, $A_1M = OO_1 = H$ — высота усеченного конуса.

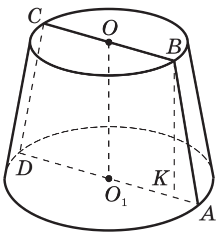
Из ΔA_1MA ($\angle A_1MA = 90°$): $A_1M = AM \operatorname{tg}\alpha = (R - r)\operatorname{tg}\alpha$.

$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$, где $H = A_1M$.

Тогда $V = \frac{1}{3}\pi(R-r)\operatorname{tg}\alpha(R^2+Rr+r^2) = \frac{1}{3}\pi(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\frac{1}{3}\pi(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha$.

Угол между прямой и плоскостью



П р и м е р. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 6 см, а образующая — 5 см. Найдите высоту усеченного конуса, площадь осевого сечения, угол наклона образующей к плоскости основания.

Решение. Пусть $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса, AO_1 = 6 см, BO = 3 см, AB = 5 см. $ABCD$ — равнобокая трапеция. Проведем $BK \perp AD$, тогда $BK = OO_1$. Из ΔABK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{AB^2 - (AO_1 - BO)^2} = \sqrt{5^2 - (6-3)^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (см)}.$$

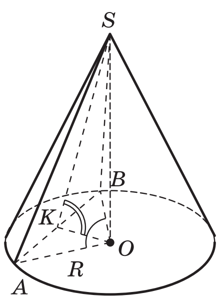
$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = \frac{2(AO_1 + BO)}{2} \cdot BK = (AO_1 + BO) \cdot BK = (3+6) \cdot 4 = 36 \text{ (см}^2),$$

где S — площадь осевого сечения. Из ΔABK:

$\operatorname{tg}\angle BAK = \frac{BK}{AK} = \frac{4}{3}$, тогда $\angle BAK = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Ответ: 4 см; 36 см^2; $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Угол между плоскостями



П р и м е р. Высота конуса равна h. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу, угловая величина которой α, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол β.

Решение. Пусть SAB — данное сечение, SO — высота, $SO = h$, $\angle AOB = \alpha$. Проведем $OK \perp AB$, тогда $SK \perp AB$ согласно теореме о трех перпендикулярах и, значит, $\angle SKO = \beta$. Из ΔSKO:

$$SK = \frac{SO}{\sin\angle SKO} = \frac{h}{\sin\beta};$$

$$KO = SO \cdot \operatorname{ctg}\angle SKO = h \operatorname{ctg}\beta.$$

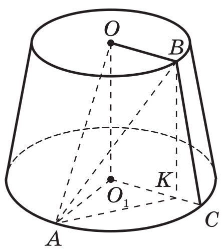
Из ΔAOK: $AK = OK \cdot \operatorname{tg}\angle AOK = h\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Площадь сечения S находим по формуле:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AK \cdot SK = AK \cdot SK = h\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{h}{\sin\beta} = h^2 \cdot \frac{\cos\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\beta}.$$

Ответ: $h^2 \cdot \frac{\cos\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\beta}$.

Угол между скрещивающимися прямыми



П р и м е р. Из центров O и O_1 усеченного конуса проведены радиусы OB и O_1A. Найдите угол между этими радиусами, если $OB = 3$ см, $O_1A = 4$ см, $OO_1 = 12$ см, $AB = 13$ см.

Решение. Проведем $O_1C \parallel OB$, тогда угол между радиусами OB и O_1A равен углу AO_1C. Проведем $BK \parallel OO_1$, тогда $BK = 12$ см, $O_1K = OB = 3$ см.

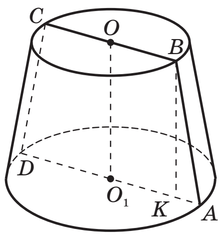
Из прямоугольного треугольника ABK имеем:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Поскольку в треугольнике O_1AK имеем: $AK^2 = AO_1^2 + O_1K^2$ $(5^2 = 3^2 + 4^2)$, то $\angle AO_1K = 90°$. Следовательно, угол между данными радиусами равен 90°.

Ответ: 90°.

Расстояние между скрещивающимися прямыми



П р и м е р. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 6 см, а образующая — 5 см. Найдите расстояние между любыми двумя диаметрами оснований.

Решение. Общим перпендикуляром двух диаметров оснований является отрезок OO_1, где O и O_1 — центры оснований.

Пусть $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса.

$AO_1 = 6$ см, $BO = 3$ см, $AB = 5$ см.

$ABCD$ — равнобокая трапеция. Проведем $BK \perp AD$, тогда $BK = OO_1$. Из прямоугольного треугольника ABK:

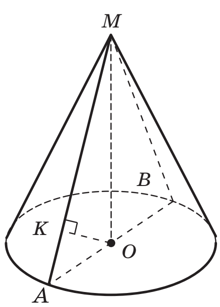
$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{AB^2 - (AO_1 - BO)^2} = \sqrt{5^2 - (6-3)^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (см)}.$$

Ответ: 4 см.

Расстояние от точки до прямой

З а д а ч а. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α, а расстояние от центра основания к образующей конуса — a. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Решение. MAB — осевое сечение конуса. $\angle AMB = \alpha$; $OK \perp AM$; $OK = \alpha$. Из ΔAOK $(\angle K = 90°)$:



$$OA = \frac{OK}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Из ΔMOA $(\angle O = 90°)$: $AM = \dfrac{AO}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

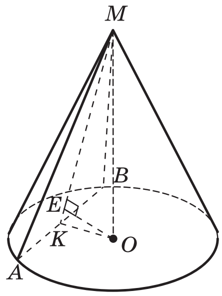
Площадь боковой поверхности конуса $S = \pi \cdot OA \cdot MA = \dfrac{\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Расстояние от точки до плоскости

П р и м е р. В основании конуса проведена хорда AB на расстоянии 3 см от центра O основания. MO — высота конуса, $MO = 6\sqrt{2}$ (см). Найдите расстояние от точки O до плоскости AMB.

Решение. Точка K — середина хорды AB. Тогда $OK \perp AB$, $OK = 3$ см. OK — проекция MK на плоскость AOB, $OK \perp AB$. Тогда $MK \perp AB$. Следовательно, $AB \perp (MOK)$ и $(AMB) \perp (MOK)$. В плоскости MOK опустим перпендикуляр OЕ на линию MK пересечения плоскостей MOK и AMB. Так как плоскости MOK и AMB перпендикулярны, то OЕ $\perp (AMB)$, то есть OЕ — искомое расстояние.



Из ΔMOK ($\angle O = 90°$):

$MK = \sqrt{OK^2 + MO^2} = \sqrt{9+72} = 9$ (см). Так как $S_{\Delta MOK} = \dfrac{1}{2}\ MO \cdot OK$ и $S_{\Delta MOK} = \dfrac{1}{2}\ OE \cdot MK$, то $OE \cdot MK = MO \cdot OK$.

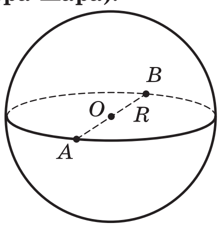
Так как $OE \cdot MK = MO \cdot OK$, то

$OE = \dfrac{MO \cdot OK}{MK} = 2\sqrt{2}$ см.

Ответ: $2\sqrt{2}$ см.

5.6.3. Шар и сфера. Площадь поверхности. Объем шара

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, расположенных на расстоянии, не большем данного (это расстояние называется радиусом шара), от данной точки (центра шара).

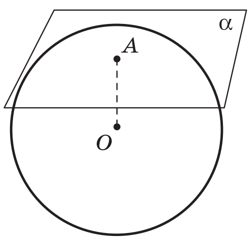


$OA = OB = R$ — радиус шара.

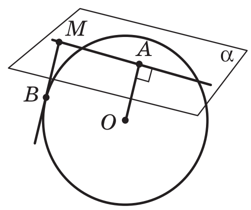
$AB = 2R$ — диаметр шара. Поверхность шара называется **шаровой поверхностью,** или **сферой.**

Шар (сфера) может быть получен вращением полукруга (полуокружности) около диаметра.

Свойства шара



$OA \perp \alpha$



$OA \perp \alpha$

$MB = MA$

1. Любое сечение шара плоскостью — круг. Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
2. **Диаметральная плоскость** проходит через центр шара.
3. Сечения шара, одинаково удаленные от его центра, имеют одинаковые радиусы.
4. Из двух сечений шара больший радиус имеет то, плоскость которого ближе к центру.
5. Любая диаметральная плоскость шара — **плоскость его симметрии**, центр шара — **центр его симметрии.**

Касательной плоскостью к шару называется плоскость, которая проходит через точку сферы (точку касания) и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.

Касательная плоскость имеет с шаром **только одну** общую точку.

Касательной к шару называется прямая, которая лежит в секущей плоскости и проходит через точку касания сферы и плоскости.

Все отрезки касательных, проведенных из данной точки к шару, равны.

Основные формулы для шара

Для шара (сферы) радиуса R:

1. Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

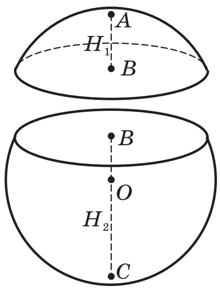
2. Площадь сферы:

$$S = 4\pi R^2.$$

Части шара

1. Шаровой сегмент

Шаровой сегмент — часть шара, которую отсекает от него секущая плоскость.



Плоскость сечения делит шар на два сегмента.

Длины отрезков диаметра, перпендикулярные плоскости сечения, называются **высотами сегментов**.

$AB = H_1$ — высота меньшего сегмента;

$BC = H_2$ — высота большего сегмента.

Основные формулы для шарового сегмента

1. Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH.$$

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн.}} = \pi H(4R - H).$$

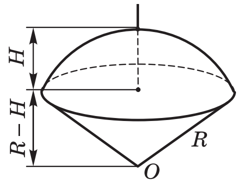
3. Объем:

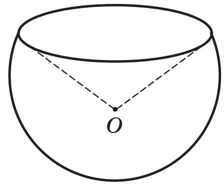
$$V_A = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, H — высота сегмента.

2. Шаровой сектор

Шаровой сектор — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре шара.





Замечание. Если шаровой сегмент меньше полушара, то для получения шарового сектора его дополняют конусом, а если больше полушара, то конус удаляют.

Основные формулы для шарового сектора

1. Площадь полной поверхности:

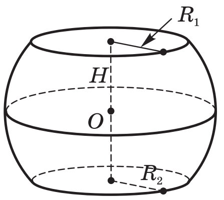
$$S_{\text{полн.}} = \pi R(2H + \sqrt{H(2R - H)}).$$

2. Объем:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

3. Шаровой слой

Шаровой слой — часть шара, размещенная между двумя параллельными секущими плоскостями.



Расстояние между этими плоскостями называется высотой шарового слоя H, а сами сечения, которые ограничивают пояс, — основаниями с радиусами R_1 и R_2.

Основные формулы для шарового слоя

1. Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус шара.

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2).$$

3. Объем:

$$V = \frac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2).$$

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.6. «Тела вращения»

5.6.1. Прямой круговой цилиндр

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | B7 | B8 | B9 | B10

B1. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если диагональ осевого сечения равна 4 и образуется с основанием угол 45°.

B2. Высота цилиндра равна 6, радиус основания равен 4. Концы данного отрезка лежат на окружности обоих обоих оснований, длина отрезка равна 8. Найдите расстояние от этого отрезка до оси цилиндра.

B3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь осевого сечения цилиндра равна $\frac{6}{\pi}$.

B4. Найдите объем (V) цилиндра, если развертка его боковой поверхности — квадрат со стороной 4. В ответ запишите πV.

B5. Найдите площадь (S) основания цилиндра, если осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна 100 см^2. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

B6. Найдите площадь S осевого сечения цилиндра, если площадь основания цилиндра равна 12, а осевое сечение его — квадрат. В ответ запишите πS.

B7. Во сколько раз увеличится объем цилиндра, если, не изменяя его высоту, увеличить радиус в $2\sqrt{2}$ раза?

B8. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если длина окружности основания цилиндра равна 18 см, а высота равна 0,5 см.

B9. Найдите площадь (S) боковой поверхности цилиндра, если диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 и образует с образующей угол 45°. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

B10. Сечение цилиндра, проведенное параллельно его оси, находится на расстоянии 2 см от нее и представляет собой квадрат. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $8\sqrt{3}\pi$. Найдите площадь сечения.

B11. Объем цилиндра равен 126, а длина окружности, ограничивающей его основание равна 18. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

B12. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π см^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

B13. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите площадь этого сечения, если площадь основания цилиндра равна 16π см^2.

B14. Осевое сечение цилиндра — квадрат, сторона которого равна 10. Найдите объем (V) цилиндра. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

B15. В прямоугольнике отношение сторон равно 3 : 4. Прямоугольник сначала вращают вокруг большей стороны, а затем вокруг меньшей. Найдите отношение объема первого образованного тела к объему второго.

B16. Найдите объем (V) тела, образованного вращением куба вокруг своего ребра, если длина ребра равна 2. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

B17. В цилиндре параллельно оси на расстоянии 5 от нее проведена плоскость, которая отсекает от окружности основания дугу в 90°. Площадь сечения 10. Найдите $\frac{V}{\pi}$, где V — объем цилиндра.

B18. В прямую призму вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна 10π. Основание призмы — ромб с углом 45°. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $\sqrt{2}$. Найдите объем призмы.

B11
B12
B13
B14
B15
B16
B17
B18

5.6.2. Прямой круговой конус

Часть 1

Ответом на задания В1–В18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Образующая конуса равна 5, высота равна 4. Найдите площадь (S) его поверхности. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

B2

B2. Найдите площадь боковой поверхности конуса, образующая которого равна 10, длина окружности основания равна 12.

B3

B3. Радиус конуса равен 6, высота — 8. Найдите образующую конуса.

B4

B4. Образующая конуса равна 4 и наклонена к плоскости основания под углом 15°. Найдите площадь осевого сечения.

B5

B5. Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найдите угол наклона образующей конуса к основанию (в градусах).

B6

B6. Образующая конуса равна 6. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие конуса, угол между которыми равен 30°.

B7

B7. Площадь основания конуса равна 9π, а полная поверхность его — 24π. Найдите объем (V) конуса. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

B8

B8. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с гипотенузой 12. Найдите объем (V) конуса. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

B9

B9. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 6 см, образующая — 5 см. Найдите котангенс угла наклона образующей к плоскости основания.

B10

B10. В усеченном конусе высота равна 5, образующая — $\frac{2}{\pi}$, боковая поверхность — 10. Найдите площадь осевого сечения.

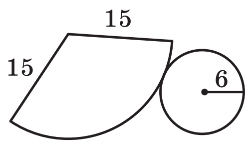
B11

B11. Высота конуса равна 4 см, образующая равна 5 см. Найдите (в градусах) угол сектора, который является разверткой боковой поверхности этого конуса.

B12. Радиусы оснований усеченного конуса равны 11 см и 6 см, образующая равна 13 см. Найдите $\frac{V}{\pi}$, где V — объем конуса.

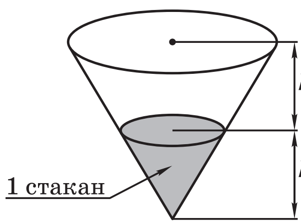
B13. Образующая усеченного конуса равна 5 см, радиусы оснований — 3 см и 6 см. Найдите площадь осевого сечения.

B14. На рисунке изображена развертка конуса. Найдите отношение площади полной поверхности этого конуса к площади его боковой поверхности.



B15. Высота конуса равна 4, радиус основания — 3. Найдите отношение площади основания конуса к площади его боковой поверхности.

B16. На рисунке изображена емкость, в которую налит один стакан жидкости. Определите, на какое количество полных стаканов жидкости рассчитана эта емкость.



B17. Прямоугольный треугольник вращается вокруг катета, длина которого 3. Гипотенуза треугольника равна 5. Найдите объем (V) тела вращения. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

B18. Через вершину конуса с радиусом основания 4 проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которую видно с центра основания конуса под углом 120°, а из вершины конуса — под углом 90°. Вычислите площадь сечения.

5.6.3. Шар и сфера

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1 |

B1. Шар радиуса 13 пересечен плоскостью на расстоянии 5 от центра шара. Найдите радиус сечения.

B2 |

B2. Найдите площадь большого круга, если радиус шара равен $\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$.

B3 |

B3. Найдите объем (V) шара, если радиус шара равен 3. В ответ запишите $\dfrac{V}{\pi}$.

B4 |

B4. Найдите отношение объема шарового сегмента к объему шара, если высота шарового сегмента равна $\dfrac{1}{3}$ диаметра шара. Ответ запишите с точностью до десятых.

B5 |

B5. Найдите площадь (S) сферы, если радиус сферы равен 5. В ответ запишите $\dfrac{S}{\pi}$.

B6 |

B6. Найдите объем (V) шара, если поверхность шара равна 36π. В ответ запишите $\dfrac{V}{\pi}$.

B7 |

B7. Шар радиуса 5 пересечен плоскостью на расстоянии 3 от центра. Найдите площадь (S) сечения. В ответ запишите $\dfrac{S}{\pi}$.

B8 |

B8. Радиусы двух сфер равны 13 и 15, расстояние между их центрами — 14. Найдите длину (l) линии, по которой пересекаются их поверхности. В ответ запишите $\dfrac{l}{\pi}$.

B9 |

B9. В полушаре радиуса 2 через середину его высоты проведено сечение, параллельное основанию полушара. Найдите объем (V) полного шарового пояса. В ответ запишите $\dfrac{3V}{\pi}$.

B10 |

B10. Радиус шарового сектора равен 3, угол в осевом сечении равен 120°. Найдите объем (V) шарового сектора. В ответ запишите $\dfrac{V}{\pi}$.

B11. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 и 40. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится центра сферы, которая имеет радиус 65 и проходит через все вершины треугольника?

B11

B12. Диагонали ромба равны 15 и 20. Шаровая поверхность касается всех сторон ромба. Радиус шара равен 10. Найдите расстояние от центра шара к плоскости ромба.

B12

B13. Радиусы трех шаров равны 3, 4 и 5. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме объемов данных шаров.

B13

B14. В стакан цилиндрической формы, наполненный водой до краев, положили металлический шарик, который касается дна стакана и стенок (высота стакана равна диаметру шара). Определите отношение воды, которая осталась в стакане, к объему воды, которая вылилась из стакана.

B14

B15. Из деревянной цилиндрической заготовки, осевым сечением которой является квадрат, выточили бильярдный шар наибольшего объема. Определите отношение объема всей заготовки к объему шара.

B15

B16. Шар пересекли плоскостью на расстоянии 12 от его центра. Площадь образованного сечения 25π. Найдите длину диаметра шара.

B16

B17. Диаметр шара равен 6 и является осью цилиндра, вписанного в этот шар. Радиус основания цилиндра равен $\sqrt{5}$. Найдите отношение объема шара к объему цилиндра.

B17

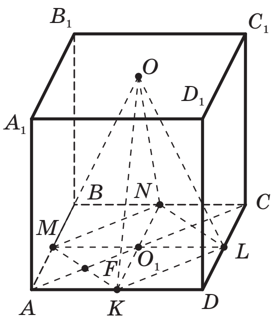
B18. Металлический шар радиуса $\sqrt[3]{16}$ переплавили в конус, высота которого 8. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади его основания.

B18

5.7. Комбинации тел

5.7.1. Комбинации многогранников

Многогранник называется **вписанным во второй многогранник**, если все вершины первого лежат на поверхности (ребрах, гранях) второго многогранника; при этом второй многогранник называется **описанным около первого**.



П р и м е р. Центр верхнего основания куба и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в этот куб пирамиды. Найдите ее боковую поверхность, если ребро куба равно a.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб, $AB = a$, M, N, L, K — середины сторон AB, BC, CD, AD; O — центр верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Из ΔABC: $AC = AB \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$. Так как отрезок AC разделен отрезками MK, BD, NL на равные отрезки, то $AF = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

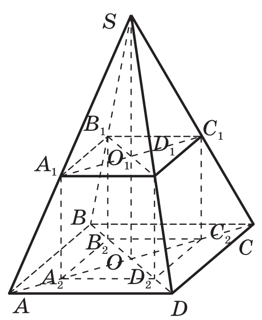
$MK = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (MK — средняя линия ΔABD).

Из ΔFO_1O имеем: $FO = \sqrt{FO_1^2 + OO_1^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right) + a^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{8} + a^2} = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$.

Площадь боковой поверхности пирамиды

$S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot MK \cdot FO = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{3a}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3a^2}{2}$.

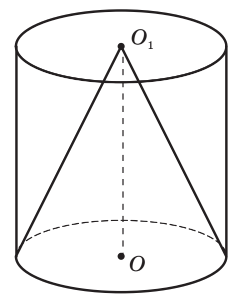


П р и м е р. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре находятся в плоскости ее основания. Найдите ребро куба, если в пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h.

Решение. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, у которой $AB = a$, $SO \perp (ABC)$, $SO = h$, $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — куб. Пусть $A_1B_1 = x$, тогда $SO_1 = h - x$, $A_2O = A_1O_1 = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$. $\Delta SAO \sim \Delta SA_1O_1$ и, значит, $\dfrac{AO}{A_1O_1} = \dfrac{SO}{S_1O_1}$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot x} = \dfrac{h}{h - x}$, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{h}{h - x}$, $ah - ax = hx$, $ah = x(a + h)$, $x = \dfrac{ah}{a + h}$ — искомое ребро куба.

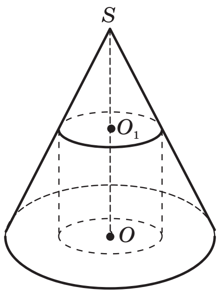
Ответ: $\dfrac{ah}{a + h}$.

5.7.2. Комбинации тел вращения



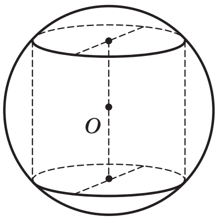
Комбинация «цилиндр–конус»

Конус называется **вписанным в цилиндр**, если основание конуса совпадает с одним основанием цилиндра, а вершина конуса лежит во втором основании цилиндра. При этом цилиндр называется **описанным около конуса**.



Цилиндр называется **вписанным в конус**, если одно основание цилиндра лежит в основании конуса, а окружность второго основания лежит на боковой поверхности конуса. Конус при этом называется **описанным около цилиндра**.

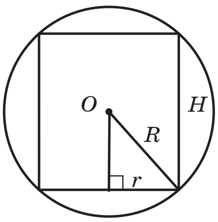
Комбинация «шар–цилиндр»



Цилиндр называется **вписанным в шар**, если его основания являются сечениями шара.

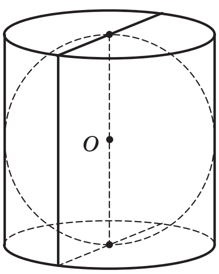
При этом шар **описан около цилиндра**.

Свойства цилиндра, вписанного в шар



1. Шар можно описать около любого прямого кругового цилиндра. Центр шара лежит на середине высоты цилиндра, соединяющей центры его оснований.
2. Основания цилиндра — равные параллельные сечения шара.
3. Осевое сечение цилиндра — прямоугольник, вписанный в большой круг шара.
4. Радиус шара R, радиус цилиндра r и высота цилиндра H связаны соотношением:

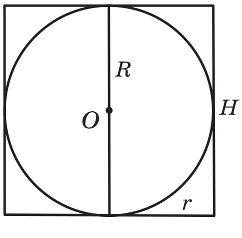
$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2.$$



Цилиндр называется **описанным около шара,** если шар касается всех образующих цилиндра и его оснований.

При этом шар **вписан в цилиндр**.

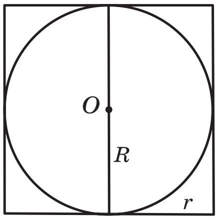
Свойства цилиндра, описанного около шара



1. Шар можно вписать только в равносторонний цилиндр. Центр шара лежит на середине высоты цилиндра, которая соединяет центры его оснований.
2. Осевое сечение — квадрат, в который вписан большой круг шара.
3. Радиус шара R равен радиусу цилиндра r и равен половине высоты H цилиндра:

$$R = r = \frac{H}{2}.$$

П р и м е р. В цилиндр, площадь осевого сечения которого равна S, вписан шар. Найти площадь полной поверхности цилиндра и площадь поверхности шара.



Решение. Рассмотрим осевое сечение цилиндра — это квадрат со стороной H или $2R$, или $2r$, площадь квадрата по условию S, значит, $H = \sqrt{S}$,

$$R = r = \frac{\sqrt{S}}{2}.$$

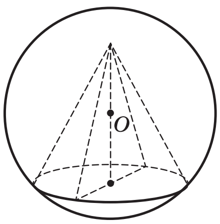
Полная поверхность цилиндра:

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{S}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{S}}{2} + \sqrt{S}\right) = \frac{3\pi S}{2};$$

$$S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{S}}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{S}{4} = \pi S.$$

Ответ: $\frac{3\pi S}{2}$ и πS.

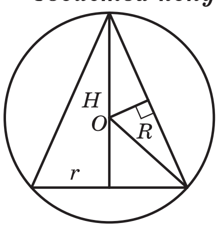
Комбинация «шар–конус»



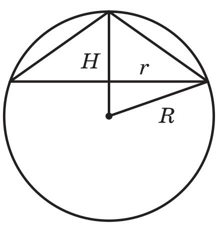
Конус называется **вписанным в шар**, если вершина конуса лежит на поверхности шара, а его основание — сечение шара.

Шар при этом **описан около конуса.**

Свойства конуса, вписанного в шар



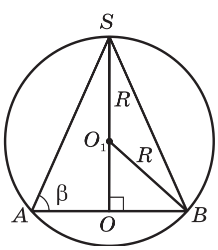
1. Шар можно описать около любого конуса.
2. Центр шара лежит на оси конуса и является центром окружности, описанной около осевого сечения конуса.



3. Радиус шара R, радиус основания r и высота конуса H связаны соотношением:

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2.$$

П р и м е р. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем конуса, если радиус описанного шара R.



Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса и шара.

SO — высота конуса, $SA = SB$ — образующие.

$\angle SBA = \angle SAB = \beta$. O_1 — центр описанного шара, $O_1S = R$.

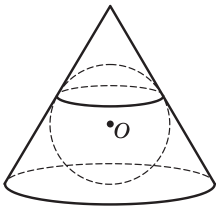
Из ΔABS по следствию из теоремы синусов:

$$\frac{AB}{\sin\angle ASB} = 2R,\ AB = 2R\sin(180^\circ - 2\beta) = 2R\sin 2\beta.$$

$$OB = \frac{1}{2}AB = R\sin 2\beta;\ SO = OB\operatorname{tg}\beta = R\sin 2\beta \times \operatorname{tg}\beta = 2R\sin^2\beta.$$

Объем конуса:
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi(R\sin 2\beta)^2\cdot 2R\sin^2\beta=\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\beta\cdot\sin^2 2\beta.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\beta\cdot\sin^2 2\beta.$



Конус называется **описанным около шара,** если шар касается всех образующих конуса и его оснований.

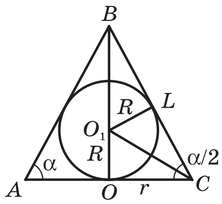
Шар при этом **вписан в конус**.

Свойства конуса, описанного около шара

1. Шар можно вписать в любой конус.

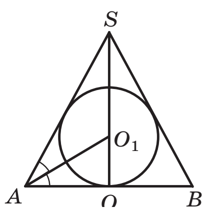
2. Центр шара лежит на оси конуса и является центром окружности, вписанной в осевое сечение конуса.

3. Радиус шара — R, радиус основания конуса — r, высота конуса — H, тогда:



$$\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}} \quad \text{и} \quad R=r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{S_{\Delta ABC}}{r+L}.$$

П р и м е р. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем конуса, если радиус вписанного в него шара равен r.



Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса и шара: SO — высота, $SA=SB$ — образующие, $\angle SBA=\angle SAB=\alpha$. По условию $OO_1=r$. Центр окружности, вписанной в треугольник, — в точке пересечения биссектрис. Поэтому $\angle O_1AO=\frac{\alpha}{2}$.

Из ΔAO_1O ($\angle AOO_1=90°$): $R=OA=O_1O\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

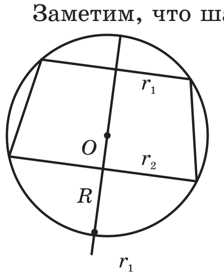
Из ΔASO ($\angle AOS=90°$): $H=SO=AO\,\mathrm{tg}\alpha=r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\alpha.$

Объем конуса:
$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\left(r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot r\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{3}\pi r^3\,\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

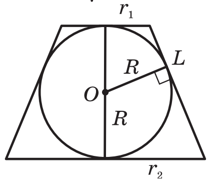
Ответ: $\frac{1}{3}\pi r^3\,\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

Комбинация «шар–усеченный конус»

Заметим, что шар комбинируется также и с усеченным конусом.



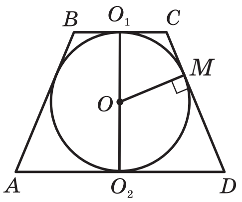
Существует единственный шар, **описанный около усеченного конуса;** центр этого шара лежит на оси усеченного конуса и является центром окружности, описанной около осевого сечения.



В усеченный конус **можно вписать шар тогда и только тогда,** когда его образующая равна сумме радиусов оснований, в этом случае вписанный шар — единственный:

$$L=r_1+r_2.$$

П р и м е р. Вокруг шара описан усеченный конус, образующая которого равна a. Найти боковую поверхность конуса.



Решение. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса. По условию $AB = CD = a$. Пусть $O_1C = r$, а $O_2D = R$.

По свойству касательных к окружности, выходящих из одной точки:

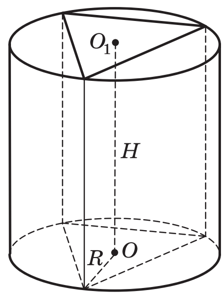
$O_1C = CM$ и $O_2D = MD$ или $O_1C + O_2D = CM + MD = CD$, таким образом, $R + r = a$.

Боковая поверхность конуса: $S_{\text{бок.}} = \pi(R + r)a = \pi a^2$.

Ответ: πa^2.

5.7.3. Комбинации многогранников и тел вращения

Комбинация «цилиндр–призма»



Призма называется **вписанной в цилиндр**, если ее основания вписаны в основания цилиндра, а боковые ребра — образующие цилиндра.

При этом цилиндр **описан около призмы**.

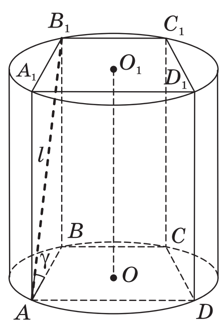
Свойства призмы, вписанной в цилиндр

1. Цилиндр можно описать около прямой призмы, если ее основание — многоугольник, около которого можно описать окружность; радиус этой окружности равен радиусу призмы.

2. Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой H призмы.

3. Боковые ребра призмы являются образующими цилиндра и также равны H.

П р и м е р. Основание прямой призмы — равнобокая трапеция с острым углом α. Диагональ трапеции — биссектриса острого угла. Диагональ боковой грани, содержащая боковую сторону трапеции, равна l и составляет с плоскостью основания угол γ. Найдите объем цилиндра, описанного около данной призмы.



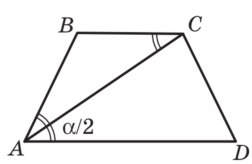
Решение. Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$, $AB = CD$, $\angle BAD = \alpha$). $BB_1 \perp (ABC)$, т. е. BB_1 — высота призмы, AB — проекция диагонали B_1A. Тогда $\angle B_1AB = \gamma$ — угол наклона диагонали B_1A к плоскости (ABC). $B_1A = l$.

Объем цилиндра можем найти по формуле: $V = \pi R^2 H$, где R — радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$ или около ΔABC, $H = BB_1$.

Из ΔB_1BA ($\angle B_1BA = 90°$): $AB = l\cos\gamma$, $B_1B = l\sin\gamma$.

В трапеции $ABCD$ AC — биссектриса $\angle BAD$; $\angle BAC = \angle DAC = \dfrac{\alpha}{2}$.

Поэтому $\angle DAC = \angle BCA$ (внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и AC — секущей), тогда $\angle BCA = \angle BAC = \dfrac{\alpha}{2}$.

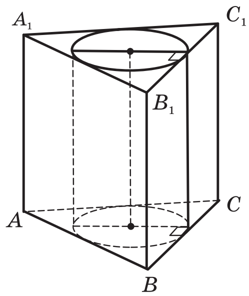


ΔABC — равнобедренный ($AB = BC$). В ΔABC:

$$AB = 2R\sin\angle BCA;\quad AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2};\quad R = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{l\cos\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

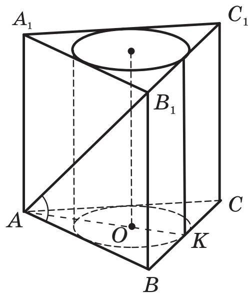
$$V = \pi\cdot\left(\frac{l\cos\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot l\sin\gamma = \frac{\pi l^3\cos^2\gamma\sin\gamma}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi l^3\cos^2\gamma\sin\gamma}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.



Призма называется **описанной около цилиндра**, если ее основания описаны около оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (лежат в касательных плоскостях).

Цилиндр при этом **вписан в призму**.



П р и м е р. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с углом β ($\beta < 90°$) при вершине. Диагональ грани, которая проходит через боковую сторону треугольника, равна a и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность цилиндра, вписанного в данную призму.

Решение. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма , у которой $\angle BAC = \beta$, $AB = AC$, $AB_1 = a$, $\angle B_1AB = \alpha$. Высота H цилиндра, вписанного в данную призму, равна высоте призмы BB_1, а радиус основания — радиусу r окружности, вписанной в ΔABC. Из ΔABB_1: $BB_1 = H = AB_1 \cdot \sin \angle B_1AB = a \sin \alpha$, $AB = AB_1 \cdot \cos \angle B_1AB = a \cos \alpha$.

Далее проведем $AK \perp BC$, тогда $\angle BAK = \angle KAC = \dfrac{\beta}{2}$.

Из ΔABK: $BK = AB \cdot \sin \angle BAK = a \cos\alpha \sin\dfrac{\beta}{2}$.

Пусть O — центр вписанной окружности в ΔABC, тогда

$$\angle ABO = \angle OBK = \frac{90° - \frac{\beta}{2}}{2} = 45° - \frac{\beta}{4}.$$

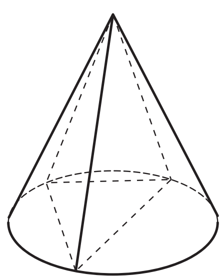
Из ΔBOK: $OK = BK \cdot \operatorname{tg} \angle OBK = a \cos\alpha \sin\dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\beta}{4}\right)$.

Боковая поверхность S цилиндра равна:

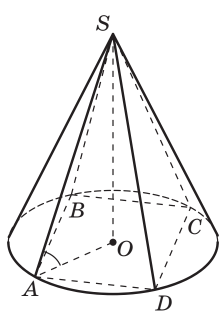
$$S = 2\pi r H = 2\pi a \cos\alpha \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right) a \sin\alpha = \pi a^2 \sin 2\alpha \sin\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right).$$

Ответ: $\pi a^2 \sin 2\alpha \sin\dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg}\left(45° - \dfrac{\beta}{4}\right)$.

Комбинация «конус–пирамида»



Пирамида называется **вписанной в конус**, если основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Боковые ребра вписанной в конус пирамиды являются образующими конуса. При этом конус называетс **описанным около пирамиды**.



П р и м е р. В правильной пирамиде боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности конуса, описанного около пирамиды, и его объем.

Решение. Пусть O — центр основания правильной пирамиды, $SO \perp (ABC)$, $SA = b$, $\angle SAO = \alpha$.

Высота SO пирамиды является высотой описанного конуса, боковые ребра — образующими. Из ΔASO: $SO = SA \cdot \sin \angle SAO = b \sin \alpha$, $AO = SA \times \cos \angle SAO = b \cos \alpha$. Площадь полной поверхности конуса $S_{\text{полн}} = \pi Rl + \pi R^2$, где $R = AO$, $l = SA = b$.

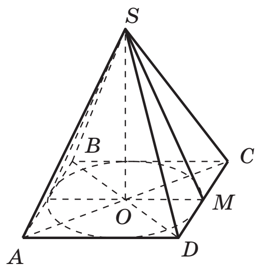
$$S_{\text{полн}} = \pi b \cos\alpha \cdot b + \pi b^2 \cos^2\alpha = \pi b^2 \cos\alpha(1 + \cos\alpha) = 2\pi b^2 \cos\alpha \times \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Объем конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = \dfrac{1}{3}\pi b^2 \cos^2\alpha \cdot b \sin\alpha = \dfrac{\pi b^3}{3}\cos^2\alpha \sin\alpha$.

Ответ: $2\pi b^2 \cos\alpha \cdot \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; $\dfrac{\pi b^3}{3}\cos^2\alpha \sin\alpha$.

Пирамида называется **описанной около конуса,** если основание пирамиды описано вокруг основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называется **вписанным в пирамиду**.

Пример. В правильный четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найти площадь полной поверхности вписанного конуса, если площадь основания пирамиды равна Q.



Решение. Пусть в основании пирамиды $SABC$ лежит квадрат $ABCD$, $SO \perp (ABC)$. $S_{ABCD} = Q$, $\angle CSD = \alpha$.

Высота SO пирамиды является высотой вписанного конуса, апофемы — образующими. Полная поверхность конуса $S_{\text{полн}} = \pi Rl + \pi R^2$, где $R = OM$, $l = SM$. Обозначим сторону основания через a, имеем: $a^2 = Q$, откуда $a = \sqrt{Q}$; $OM = \dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{2}\sqrt{Q}$.

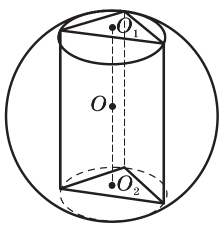
ΔCSD — равнобедренный, отсюда $\angle CSM = \angle DSM = \dfrac{\alpha}{2}$,

$CM = DM = \dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{2}\sqrt{Q}$.

Из ΔSMC: $SM = MC \cdot \operatorname{ctg} \angle MSC = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot S_{\text{полн.}} = \dfrac{\pi\sqrt{Q}}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \pi\left(\dfrac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi Q}{2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + 1\right)$.

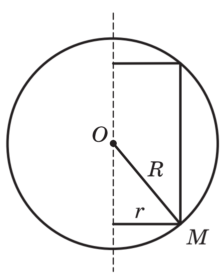
Ответ: $\dfrac{\pi Q}{2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + 1\right)$.

Комбинация «шар– призма»



Призма называется **вписанной в шар**, если все ее вершины лежат на поверхности шара.

При этом шар **описан** около призмы. Если призма вписана в шар, то она **прямая**.



Свойства призмы, вписанной в шар

1. Шар можно описать около прямой призмы, если около оснований можно описать окружность. Центр шара лежит на середине высоты призмы, которая соединяет центры этих окружностей.

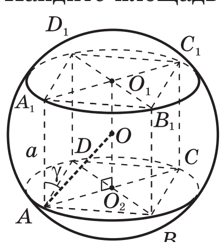
2. Основания призмы вписаны в равные и параллельные сечения шара.

3. При решении задач проще не строить полный чертеж, а рассмотреть сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара и боковое ребро призмы.

Радиус шара R, высота призмы H и радиус r окружности, описанной около основания призмы, связаны соотношением:

$$R^2 = \frac{H^2}{4} + r^2.$$

Пример. Около правильной четырехугольной призмы описана сфера. Радиус сферы, проведенный к вершине призмы, составляет с боковым ребром угол γ. Боковое ребро призмы равно a. Найдите площадь поверхности сферы.



Решение. Все вершины призмы лежат на поверхности шара, центр шара точка O — середина высоты O_1O_2.

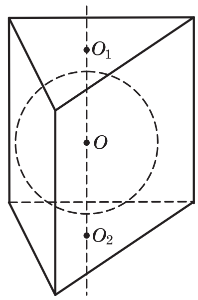
$\angle A_1AO = \gamma$, $A_1A = a$.

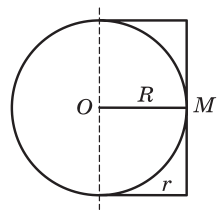
Из ΔOO_2A ($\angle OO_2A = 90°$):

$$OA = \frac{a}{2\sin(90° - \gamma)} = \frac{a}{2\cos\gamma};$$

$O_1O_2 = A_1A = a$; $OO_2 = \dfrac{a}{2}$; $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \dfrac{a^2}{4\cos^2\gamma} = \dfrac{\pi a^2}{\cos^2\gamma}$.

Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{\cos^2\gamma}$.





Призма называется **описанной около шара**, если все ее грани касаются поверхности шара. При этом шар **вписан в призму**.

Свойства призмы, описанной около шара

1. Шар можно вписать в прямую призму, если в ее основания можно вписать окружности, а высота призмы равна диаметрам этих окружностей. Центр шара — на середине высоты призмы, соединяющей центры этих окружностей.

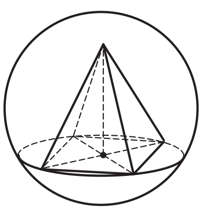
2. При решении задач проще рассмотреть сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара перпендикулярно боковой грани призмы.

Радиус шара R равен радиусу r окружности, вписанной в основание призмы, и равен половине высоты призмы H:

$$R = r = \frac{H}{2}.$$

3. Чтобы в призму можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы в ее перпендикулярное сечение можно было вписать окружность и чтобы высота призмы равнялась диаметру этой окружности.

Комбинация «шар–пирамида»



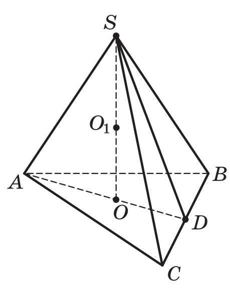
Пирамида называется **вписанной в шар**, если все ее вершины лежат на поверхности шара.

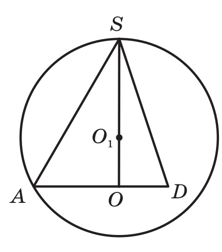
При этом шар **описан около пирамиды**.

Свойства правильной пирамиды, вписанной в шар

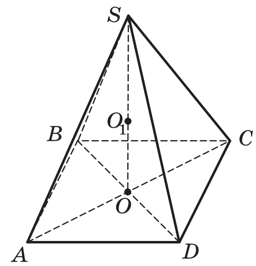
1. Шар можно описать около любой правильной пирамиды.
2. Центр шара лежит на прямой, которая содержит высоту пирамиды.
3. Решая задачи, обычно рассматривают сечения:

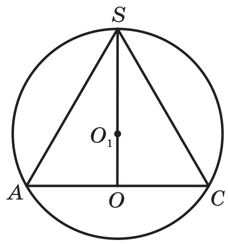
а) в треугольной правильной пирамиде целесообразно провести сечение через медиану основания и вершину пирамиды;





б) в четырехугольной правильной пирамиде рассматривают сечение, проходящее через одну из диагоналей основания и вершину пирамиды.



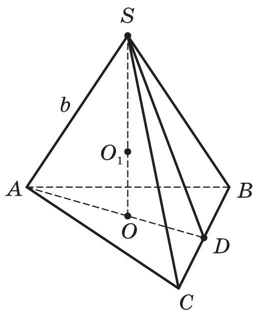


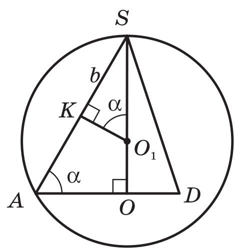
4. Радиус шара R, высота пирамиды H и радиус r окружности, описанной около основания пирамиды, связаны соотношением: $R^2 = (H - R)^2 + r^2$.

П р и м е р. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b и наклонено к основанию под углом α. Найдите площадь поверхности сферы, описанной около данной пирамиды.

Решение. Рассмотрим сечение, проходящее через медиану AD (ΔABC — основание правильной треугольной пирамиды) и вершину пирамиды S.

Так как центр шара одинаково удален от вершин пирамиды A и S, он находится на серединном перпендикуляре KO_1 к отрезку AS.



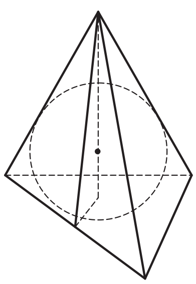


В ΔSOA ($\angle SOA = 90°$): $\angle SAO = \alpha$. Очевидно, что в ΔKSO_1 ($\angle SKO_1 = 90°$) $\angle SO_1K = \alpha$.

Тогда $SO_1 = \dfrac{KS}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{2\sin\alpha}$;

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{b^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{\pi b^2}{\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi b^2}{\sin^2\alpha}$.



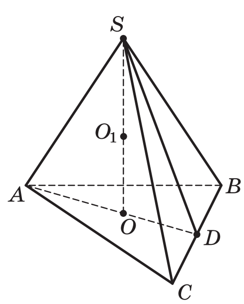
Пирамида называется описанной около шара, если все ее грани касаются поверхности шара.

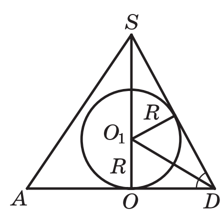
При этом шар называется **вписанным в пирамиду**.

Свойства пирамиды, описанной около шара

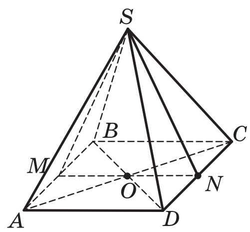
1. Шар можно вписать в любую правильную пирамиду.
2. Центр шара лежит на высоте пирамиды.
3. При решении задач обычно рассматривают сечение:

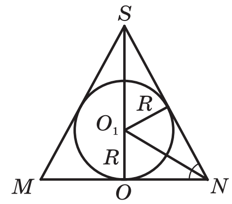
а) в треугольной пирамиде рассматривается сечение, проходящее через медиану правильного треугольника ABC и вершину пирамиды;





б) в четырехугольной пирамиде рассматривают сечение, проходящее через вершину пирамиды и апофемы противолежащих боковых граней.



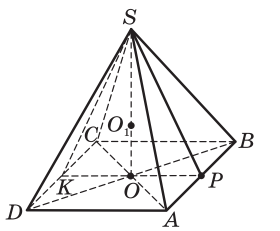


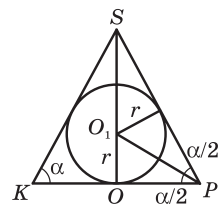
4. Радиус шара R, высота H пирамиды и радиус r окружности, вписанной в основание пирамиды, связаны соотношением: $\dfrac{R}{H-R}=\dfrac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}$.

5. Центр вписанного шара лежит на пересечении высоты пирамиды с биссектрисой угла между апофемой и проекцией апофемы на плоскость основания.

П р и м е р. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус вписанного шара равен r.

Решение. Рассмотрим сечение, проходящее через вершину пирамиды S и апофемы SK и SP. Очевидно, что угол между апофемой и ее проекцией, т. е. $\angle SKO=\alpha$ — линейный угол двугранного угла при основании.





O_1P — биссектриса $\angle SPO$ и $\angle O_1PO=\angle SPO_1=\dfrac{\alpha}{2}$; $O_1O=r$.

Из ΔO_1OP ($\angle O_1OP=90°$): $OP=O_1O\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

$AB=2\cdot OP=2r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. $S_{ABCD}=AB^2=4r^2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

По теореме о площади ортогональной проекции для правильной пирамиды

$$S_{\text{бок.}}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha}=\frac{4r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{4r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.7. «Комбинации тел»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Найдите радиус шара, вписанного в куб, если ребро куба равно 8.

B2

B2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если в цилиндр вписан шар радиуса 3.

B3

B3. Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус, высота и радиус основания которого соответственно равны 3 см и 4 см.

B4

B4. Найдите отношение (с точностью до сотых) объема шара к объему куба, описанного около шара.

B5

B5. Найдите отношение (с точностью до сотых) площади поверхности куба к площади описанного вокруг него шара.

B6

B6. Найдите отношение объема цилиндра к объему шара, вписанного в цилиндр.

B7

B7. В равносторонний конус вписан шар. Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

B8

B8. В шар вписан равносторонний конус. Найдите отношение (с точностью до десятых) объема шара к объему конуса.

B9

B9. В цилиндр вписан куб. Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади полной поверхности куба. Ответ запишите с точностью до десятых.

B10

B10. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4 см, 4 см и 2 см. Найдите радиус шара, описанного вокруг этого параллелепипеда.

B11. Ребро куба равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите радиус шара, описанного около этого куба.

B11

B12. Ребро правильного тетраэдра равно $\sqrt{6}$ см. Найдите радиус шара, вписанного в данный тетраэдр.

B12

B13. Цилиндр вписан в куб. Известно, что объем куба равен 40. Найдите объем (V) цилиндра. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

B13

B14. Из цилиндра выточен конус таким образом, что его основание совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина — с центром другого основания цилиндра. Найдите отношение объема сточенной части цилиндра к объему конуса.

B14

B15. В цилиндр вписан шар. Найдите объем шара, если объем цилиндра равен 60.

B15

B16. В пустую цилиндрическую емкость с диаметром основания 24 налили воду. В воде полностью утопили шар. Найдите радиус шара, если известно, что вода в емкости поднялась на 6,7 и не вылилась.

B16

B17. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $2\sqrt{2}$, высота пирамиды — 2. Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

B17

Тренировочные тестовые задания к разделу 5 «Геометрические фигуры, их свойства. Измерение геометрических величин»

Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

В1

В1. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр AS к плоскости ABC. $AS = \sqrt{3}$ см, $SB = 2$ см. Найдите площадь треугольника SBC.

В2

В2. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника BCD, если $AB = \sqrt{18}$ см, $AC = \sqrt{18}$ см, $AD = \sqrt{7}$ см.

В3

В3. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 4 см, а разность диагоналей равна 4 см.

В4

В4. Шар радиуса 41 см пересечен плоскостью. Площадь сечения равна 1600π см^2. На каком расстоянии от центра шара проведена секущая плоскость?

В5

В5. Полукруг свернули в коническую поверхность. Найдите угол (в градусах) между образующий и высотой конуса.

В6

В6. Найдите сумму координат каждой из точек пересечения окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

В7

В7. Боковая поверхность конуса равна 10 см^2 и разворачивается в сектор с углом 36°. Найдите полную поверхность конуса.

В8

В8. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 см и 12 см, а каждое из боковых ребер равно 12,5 см. Найдите объем (в см^3) пирамиды.

В9

В9. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, и бóльшая из них точкой пересечения делится на отрезки 9 см и 16 см. Найдите высоту (в см) трапеции.

B10. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, в которой площадь наибольшего диагонального сечения равна 4 см^2, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями равно 2 см.

B10

B11. Найдите бо́льший катет прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части, равные 30 см и 40 см.

B11

B12. Объем стенок пустотелого шара равен 876π см^3, а толщина стенок 3 см. Найдите (в см) внешний радиус шара.

B12

Часть 2

При выполнении заданий С1–С6 требуется привести полное обоснованное решение и ответ.

C1. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани — 2,5 см. Найдите объем (в см^3) призмы.

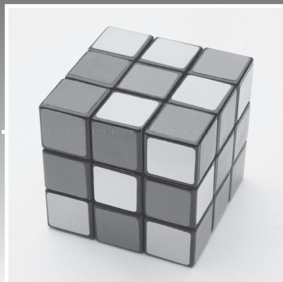
C2. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удаленной от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Найдите длину секущей (в см).

C3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения этого куба, которое проходит через вершину A и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1, если ребро куба равно a.

C4. Через середину высоты правильной треугольной пирамиды параллельно ее боковой грани проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения, если площадь боковой грани пирамиды равна S.

C5. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение плоскостью, которая проходит через диагональ основания параллельно боковому ребру. Сторона основания равна a, боковое ребро равно b. Найдите площадь сечения.

C6. Сфера касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной 2. Найдите дину бокового ребра пирамиды, если радиус сферы равен 3.



Раздел 6
Элементы комбинаторики, статистики, теории вероятности

6.1. Простейшие комбинаторные задачи

6.1.1. Множества и операции над ними

Множество и подмножество

Под множеством в математике понимают собрание, совокупность любых предметов, объектов, объединенных между собой некоторым общим для них всех признаком. Множество как математическое понятие не имеет определения. Это первичное понятие. Смысл его можно объяснить на разных примерах. Так, можно говорить о множестве учащихся вашего класса, о множестве книг в библиотеке, о множестве всех людей на Земле и др.

Когда в математике говорят о множестве, то объединяют некоторые предметы или понятия в одно целое — множество, состоящее из этих предметов. Основатель теории множеств Георг Кантор (1845–1918) определил это такими словами: «Множество есть многое, мыслимое как единое».

Предметы (объекты), из которых состоит множество, называют его элементами. Для обозначения множеств используют прописные буквы A, B, C, ..., для обозначения элементов — малые a, b, c, ...

Тот факт, что элемент a является элементом множества A, записывают так: $a \in A$ (читается: «a является элементом множества A, или a принадлежит A, или a содержится в A, или A содержит a»). Если элемент x не является элементом множества A, то это записывается так: $x \notin A$ (читается: «x не является элементом множества A, или x не принадлежит A, или x не содержится в A, или A не содержит x»).

Например, если A — множество делителей числа 30, то $5 \in A$, $10 \in A$, $7 \notin A$, $12 \notin A$ и т. д.

Множество иногда можно задать перечислением его элементов. Например, множество стран на земном шаре задается их списком в географическом атласе, множество учащихся вашего класса — их списком в классном журнале. Если множество задано списком, то используют фигурные скобки, в которые помещают названия всех элементов множества, разделенные запятыми. Например, если A — множество делителей числа 30, то $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Если B — множество букв слова «класс», то $B = \{к, л, а, с\}$.

Не все множества можно задать списком. Если множество содержит бесконечно много элементов, то такое множество нельзя задать перечислением его элементов. Множество считается заданным, если указано свойство, которое имеют все его элементы, и не имеют это свойство другие объекты. Такое свойство называется **характеристическим свойством** множества.

Множество элементов, имеющих данное характеристическое свойство, обозначают так: пишут фигурные скобки, в них — обозначение элемента множества, после него — двоеточие, а потом — характеристическое свойство.

Например, запись $A = \{x\colon -3 \le x \le 4\}$ означает, что множество A состоит из всех чисел x, которые удовлетворяют неравенству $-3 \le x \le 4$.

Множество, имеющее определенное количество элементов (существует число, которое выражает количество элементов данного множества), называется **конечным**. Если множество имеет бесконечное количество элементов, его называют **бесконечным** множеством.

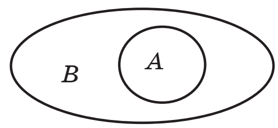
Множество, которое не имеет ни одного элемента, называют *пустым*. Например, множество точек пересечения двух параллельных прямых; множество квадратных уравнений, имеющих больше двух разных корней.

Пустое множество обозначают так: $\varnothing$.

Если каждый элемент множества A содержится в множестве B, то множество A называется **подмножеством** множества B. Это записывается так: $A \subset B$ (читается: «A является подмножеством B, или A содержится в B, или B содержит A).

Например: множество учащихся вашего класса является подмножеством учащихся школы; множество жителей Москвы является подмножеством жителей России; множество звезд нашей Галактики является подмножеством множества всех звезд Вселенной.

Каждое непустое множество A имеет хотя бы два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само множество A.

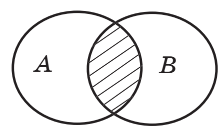


Если $A \subset B$, то наглядно это изображают с помощью диаграммы Эйлера. Два множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Это записывается так: $A = B$.

Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все общие элементы множеств A и B, и только их.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A_n^m = n$. Пересечение множеств A и B можно изобразить с помощью диаграммы Эйлера.



$A \cap B$

Рассмотрим примеры:

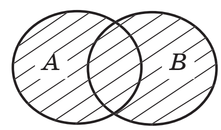
а) если $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, m, n, p\}$, то $A \bigcap B = \{a, c\}$.

б) если A — множество всех прямоугольников, B — множество всех ромбов, C — множество всех квадратов, то $C = A \bigcap B$.

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, содержащихся хотя бы в одном из двух множеств A, B, и только их.

Объединение множеств A и B обозначается так: $A \bigcup B$. С помощью диаграммы Эйлера можно изобразить объединение множеств A и B.



$A \cup B$

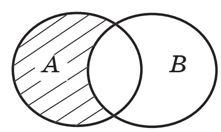
Рассмотрим примеры:

а) если $A = \{a, b, c, d\}$, то $B = \{a, c, m, n, p\}$, то
$A \bigcup B = \{a, b, c, d, m, n, p\}$;

б) если A — множество всех прямоугольников, B — множество всех квадратов, то $A \bigcup B = A$.

Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество всех таких элементов множества A, которые не содержатся в множестве B.



$A \setminus B$

Разность множеств A и B обозначается так: $A\setminus B$. С помощью диаграммы Эйлера можно изобразить разность множеств A и B.

Рассмотрим примеры:

а) если $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, m, n, p\}$, то $A\setminus B = \{b, d\}$, $B\setminus A = \{m, n, p\}$;

б) если A — множество учащихся вашего класса, B — множество девочек вашего класса, C — множество мальчиков вашего класса, то $A \backslash B = C$, $A \backslash C = B$. В случае, если B — часть множества A ($B \subset A$), то $A \backslash B$ называют дополнением к B в множестве A и обозначают $C_A B$.

Числовые множества

Множества могут состоять из любых объектов разной природы. Для математики особенно важную роль играют множества, составленные из математических объектов — чисел, геометрических фигур и др. Очень часто встречаются числовые множества, то есть множества, элементами которых являются числа. Вспомним некоторые множества чисел, с которыми вы ознакомились в курсе математики.

1. Множество натуральных чисел, то есть чисел, которые возникают в процессе счета предметов. Это множество чисел обозначают буквой N:

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}.$$

В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения и умножения (вычитание и деление не всегда можно выполнить в множестве натуральных чисел, то есть результат вычитания и деления двух натуральных чисел не всегда является натуральным числом).

2. Объединение натуральных чисел, чисел, противоположных натуральным, и число 0 образуют множество целых чисел, которое обозначают буквой Z:

$$Z = \{\pm 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots\}.$$

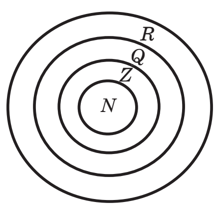
В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения, вычитания и умножения. Однако частное двух целых чисел не всегда является числом целым.

3. Множество рациональных чисел (его обозначают буквой Q) — это множество чисел, которые можно представить в виде несокращаемой дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$:

$$Q = \left\{x\colon x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N\right\}.$$

Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической дроби. Например, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(03)$. В множестве рациональных чисел всегда выполняются действия сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на 0). Однако квадратный корень из рационального числа не всегда является рациональным числом. Например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д.

4. Числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (или числа, представленные в виде бесконечной непериодической дроби, например, $\pi = 3{,}1415926\ldots$), образуют множество иррациональных чисел.



Объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных чисел, которое обозначают буквой R.

Во множестве действительных чисел всегда можно выполнить действия сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на 0), извлечения квадратного корня из неотрицательного числа.

На рисунке в виде диаграммы Эйлера даны соотношения между числовыми множествами: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

6.1.2. Элементы комбинаторики

Перестановки

Любое упорядоченное множество, состоящее из n элементов, называется перестановкой из n элементов и обозначается P_n.

Таким образом, перестановки из n элементов отличаются между собой только порядком элементов.

Два элемента a и b можно упорядочить двумя способами: ab и ba. Это две перестановки из элементов a и b. Итак, $P_2 = 2$.

Чтобы образовать перестановки из трех элементов a, b, c, можно третий элемент c поместить впереди пары ab, посередине пары ab и в конце пары ab:

$$cab,\ acb,\ abc.$$

Точно так из пары ba можно получить:

$$cba,\ bca,\ bac.$$

Итак, для трех элементов существует $2 \cdot 3 = 6$ способов расположения по порядку, число перестановок из трех элементов равно 6: $P_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

Пусть имеем k элементов, из которых составлены все возможные P_k перестановки. Возьмем одну из них: $a_1a_2a_3...a_k$. Добавим еще один $(k + 1)$-й элемент. Его можно поместить:

1) перед первым элементом a_1;

2) перед вторым элементом a_2;

3) перед третьим элементом a_3;

....

k) перед k-м элементом a_k;

$(k + 1)$ в конце всех элементов,

то есть всего $k + 1$ способов.

Итак, количество перестановок из $k + 1$ элементов в $(k + 1)$ раз больше, чем число перестановок из k элементов, то есть

$$P_{k+1} = P_k \cdot (k + 1).$$

$P_1 = 1$;

$P_2 = P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$;

$P_3 = P_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

$P_4 = P_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;

$P_5 = P_4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$;

....

$P_k = P_{k-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$;

$P_{k+1} = P_k \cdot (k + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k \cdot (k + 1)$.

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

Произведение натуральных чисел от 1 до данного натурального числа n называется **факториалом** числа n и обозначается $n!$ В таблице приведены значения факториала для значений n от 1 до 10.

Число перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n, то есть $n!$ (читают: «эн факториал»):

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить на площадке 6 волейболистов?

Решение. $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Размещения

Любое упорядоченное подмножество из m элементов данного множества, содержащего n элементов, где $m \le n$, называется размещением из n элементов по m.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначают символом A_n^m. Рассмотрим множество $\{a, b, c\}$ и выпишем размещения из элементов данного множества по два:

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb.$$

Итак, $A_3^2 = 6$.

Найдем значение A_n^m.

Пусть имеем множество, содержащее n элементов. Первый элемент m-элементного подмножества можно выбрать n способами: второй элемент — $(n - 1)$ способами; третий элемент — $(n - 2)$ способами; ...; m-й элемент — $(n - m + 1)$ способами:

Итак,

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1),$$

то есть число размещений из n элементов по m элементов равно произведению m последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n.

Если $n = m$, то имеем $A_n^m = P_n$, то есть перестановка — отдельный случай размещения.

Сочетания

Пусть дано множество $\{a, b, c\}$. Из элементов этого множества можно образовать 6 двухэлементных размещений:

$$ab,\ ac,\ bc,\ ba,\ ca,\ cb.$$

Это упорядоченные подмножества данного множества. А сколько неупорядоченных двухэлементных подмножеств можно составить из тех же элементов? Только три: $\{ab\}$, $\{ac\}$, $\{bc\}$.

Любое подмножество из m элементов данного множества, содержащее n элементов, называется *сочетанием* из n элементов по m элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначают символом C_n^m. Например: $C_3^2 = 3$.

Из четырех элементов множества $\{a, b, c, d\}$ можно образовать 6 сочетаний по 2 элемента:

$$\{a, b\};\ \{a, c\};\ \{a, d\};\ \{b, c\};\ \{c, d\};\ \{b, d\};$$

3 сочетания по 3 элемента:

$$\{a, b, c\};\ \{a, b, d\};\ \{b, c, d\}.$$

Таким образом, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 3$.

Договорились считать, что $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$.

Выведем формулу для нахождения значений C_n^m, для этого сравним числа C_n^m и A_n^m при одних и тех же значениях m и n.

Каждое m-элементное сочетание можно упорядочить P_m способами. В результате из одного сочетания образуется A_n^m размещений (упорядоченных подмножеств) из тех же элементов. Итак, число m-элементных сочетаний в P_m раз меньше, чем число размещений из тех же элементов. То есть $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$, отсюда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Число сочетаний из n элементов по m элементов равно дроби, числитель которой является произведением m последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n, а знаменатель дроби — произведение m последовательных натуральных чисел.

Учитывая, что $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, можно получить:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Итак,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

П р и м е р 1. Вычислите: а) C_{10}^3; б) C_{50}^{49}.
а) $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$; б) $C_{50}^{49} = \dfrac{50!}{49!(50-49)!} = \dfrac{50!}{49!} = \dfrac{49!50}{49!} = 50.$

П р и м е р 2. Сколькими способами из 25 учащихся можно выбрать 3 дежурных?
Решение. Выбор 3 дежурных из 25 учащихся — это сочетание 3 учащихся из 25 учащихся.
Итак, $n = C_{25}^3 = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300.$
Ответ: 2300 способами.

Свойства числа сочетаний

1. Пусть дано множество, содержащее n элементов. Выберем одно сочетание из m элементов, этому сочетанию соответствует одно сочетание невыбранных $(n - m)$ элементов. Количество сочетаний из n элементов по m элементов равно C_n^m, а количество сочетаний из n элементов по $(n - m)$ элементов равно C_n^{n-m}. Поскольку каждому сочетанию выбранных m элементов соответствует одно сочетание невыбранных $(n - m)$ элементов, то $C_n^m = C_n^{n-m}$. Итак, для любых n и m $(0 \le m \le n)$ справедливо равенство:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Этот же результат можно получить непосредственно из формулы числа сочетаний, если записать ее с помощью факториалов:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^{n-m}.$$

Это свойство дает возможность упростить вычисления числа сочетаний.

П р и м е р . Вычислите C_{180}^{178}.

Решение. $C_{180}^{178} = C_{180}^2 = \dfrac{180 \cdot 179}{1 \cdot 2} = 16\,110.$

2. Рассмотрим множество, содержащее n элементов. Выделим m-элементные подмножества и разделим их на две группы: подмножества, в состав которых входит некоторый элемент a данного множества, и подмножества, в состав которых a не входит. Число подмножеств в первой группе равно C_{n-1}^{m-1}, потому что каждое такое подмножество получают присоединением к a некоторого $(m - 1)$-элементного подмножества. Число подмножеств во второй группе равно C_{n-1}^m. Итак, $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$. Это равенство можно доказать по-другому:

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!\,m!} =$$

$$= (n-1)!\left(\frac{1}{(n-m)!(m-n)!} + \frac{1}{(n-m-1)!\,m!}\right) =$$

$$= (n-1)!\cdot \frac{m+n-m}{(n-m-1)!(n-m)(m-1)!\,m} = \frac{(n-1)!\,n}{(n-m)!\,m!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^m.$$

3. Справедливо равенство:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Так как C_n^m — число m-элементных подмножеств некоторого множества, содержащего n элементов, то $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$ — число всех подмножеств множества из n элементов. Докажем, что число всех подмножеств множества, содержащего n элементов, равно 2^n.

Пронумеруем элементы множества и для каждого подмножества данного множества построим последовательность длиной n из нулей и единиц по следующему правилу: на m-м месте пишем 1, если элемент m не входит в подмножество. Итак, каждому подмножеству соответствует своя последовательность нулей и единиц. Например, пустому множеству соответствует последовательность из одних нулей, всему множеству — последовательность из одних единиц. Число всех подмножеств равно числу всех возможных последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц, и равно $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Треугольник Паскаля

Запишем все возможные элементы C_n^m ($n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots, n$) в виде треугольной таблицы.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & & \cdots & & & & & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & \cdots\cdots & & C_n^{n-1} & & C_n^n & \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Учитывая свойства числа сочетаний C_n^m, а именно:
1) $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = \ldots = C_n^0 = C_n^n = 1$; 2) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$,
эту таблицу легко записать в числовом виде:

$$\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & n = 0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & n = 1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & n = 2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & n = 3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & n = 4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & n = 5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & n = 6 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & &
\end{array}$$

Эта таблица построена так: в первой строке записана 1, во второй — по сторонам от нее по единице. В каждой последующей строке первые и последние числа — единицы, а каждое второе равно сумме двух ближайших к нему чисел сверху (свойство 2).

Следует указать, что числа ряда, расположенные на одинаковом расстоянии от его концов, равны между собой. Это следует из равенства: $C_n^m = C_n^{n-m}$. Сумма чисел m-й строки равна 2^n.

Эту треугольную таблицу называют *треугольником Паскаля* по имени французского математика Б. Паскаля (1623–1662), который занимался исследованием свойств этой таблицы и применением ее к решению задач и упражнений.

Решение простейших комбинаторных задач

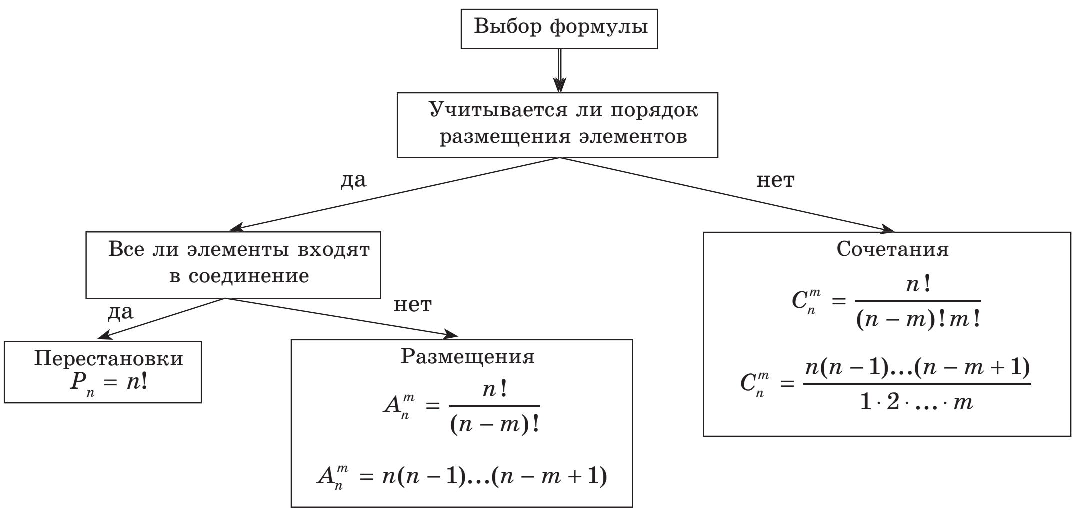
Сочетания, размещения и перестановки вместе называют **соединениями**, или **комбинациями**. Раздел математики, в котором рассматриваются свойства комбинаций, называют **комбинаторикой**, а задачи этого раздела — **комбинаторными задачами.**

При решении комбинаторных задач сначала следует определить вид соединения (см. таблицу). Напомним, что:

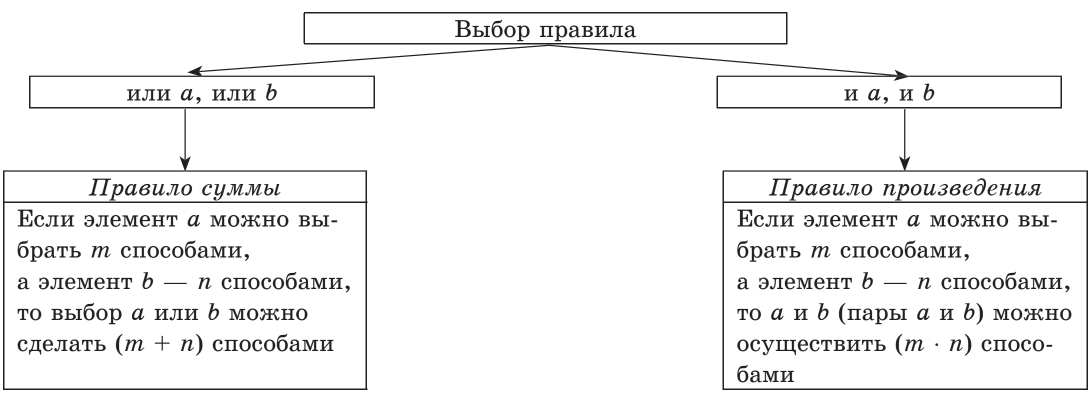
— перестановки отличаются друг от друга порядком расположения элементов;

— размещения отличаются или выбором элементов, или порядком их расположения;

— сочетания отличаются только выбором элементов (порядок размещения элементов не учитывается).



Комбинаторные задачи бывают разных видов. Но большинство из них решают с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.



П р и м е р . В классе 12 мальчиков и 10 девочек.

а) Сколькими способами можно выбрать одного ученика этого класса?
б) Сколькими способами двух — мальчика и девочку?
в) Сколькими способами можно выбрать девочку?
г) Уже выбран один ученик. Сколькими способами можно выбрать после этого мальчика и девочку?

Решение.

а) Мальчика можно выбрать 12 способами, а девочку — 10 способами, тогда по правилу суммы или девочку, или мальчика можно выбрать $12 + 10 = 22$ (способами).
б) Мальчика можно выбрать 12 способами, а девочку — 10 способами, тогда по правилу произведения и девочку, и мальчика можно выбрать $12 \cdot 10 = 120$ (способами).
в) Девочку можно выбрать 10 способами.
г) Если один ученик уже выбран, то возможны три варианта:
1) если был выбран мальчик, то мальчиков осталось 11, итак, существует 11 вариантов его выбора, для девочки — 10 вариантов, для пары $11 \cdot 10 = 110$ (вариантов).
2) Если была выбрана девочка, тогда девочек осталось 9, итак, девочку можно выбрать 9 способами, мальчика — 12 способами, а пару можно выбрать $9 \cdot 12 = 108$ (способами).

По правилу суммы имеем общее количество вариантов
$11 \cdot 10 + 12 \cdot 9 = 110 + 108 = 218$.
Ответ: а) 22; б) 120; в) 10; г) 218.

Бином Ньютона

Вам известны формулы:

$$(a + b)^0 = 1 \text{ (при условии } a + b \neq 0);$$
$$(a + b)^1 = a + b;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Нетрудно вычислить, что:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^2 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^2 =$$
$$= a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2;$$

$$(a + b)^2 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = (a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2)(a + b) = a^4 + 3a^2b + 3a^2b^2 + ab^2 + a^2b +$$
$$+ 3a^2b^2 + 3ab^2 + b^4 = a^4 + 4a^2b + 6a^2b^2 + 4ab^2 + b^4.$$

Сразу бросается в глаза то обстоятельство, что коэффициенты в правых частях этих формул равны числам из соответствующих строк треугольника Паскаля.

Выясняется, что для каждого натурального n верна и общая формула:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^m b^n,$$

названная формулой **бинома (двучлена) Ньютона** в честь английского физика и математика Исаака Ньютона (1643–1727).

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^m b^n,$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m элементов, причем эти числа имеют еще одно название — **биномиальные коэффициенты.** Правую часть последней формулы называют **биномиальным разложением**, или **разложением бинома**.

Рассмотрим основные следствия из формулы Ньютона.

1. В разложении $(a + b)^n$ содержится $(n + 1)$ слагаемых.

2. В формуле Ньютона показатели степени a убывают от n до 0, а показатели степени при b возрастают от 0 до n. Сумма показателей при a и b в любом слагаемом разложения равна n — показателю степени бинома.

3. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны между собой, так как $C_n^m = C_n^{n-m}$.

4. Общий член разложения (обозначим его T_{m+1}) имеет вид:

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m, \; m = 0, 1, \ldots, n.$$

5. Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n.

Действительно: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

П р и м е р 1. Возведите в шестую степень $x - 2y$.

Решение. Примем $a = x$, $b = -2y$, тогда получим:

$(x-2y)^6 = C_6^0 x^6 + C_5^1 x^5(-2y) + C_6^2 x^4(-2y)^2 + C_6^3 x^3(-2y)^2 +$

$+C_5^4 x^2(-2y)^4 + C_6^5 x(-2y)^5 + C_6^6(-2y)^6 = 1 \cdot x^6 + 6x^5(-2y) +$

$+15x^4 \cdot 4y^2 + 20x^3(-8y^3) + 15x^2 \cdot 16y^4 + 6x(-32y^5) + 1 \cdot 64y^5 =$

$= -12x^5 y + 60x^4 y^2 - 160x^3 y^2 + 240x^2 y^4 - 192xy^5 + 64y^5.$

П р и м е р 2. Найдите 13-й член разложения бинома $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$.

Решение. Согласно формуле общего члена разложения бинома имеем:

$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12}(\sqrt[3]{3})^3 \cdot (\sqrt{2})^{13} = C_{15}^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^6 = 37\ 360.$

Следовательно, $T_{13} = 37\ 360$.

П р и м е р 3. Найдите номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)^{15}$, который не содержит x.

Решение. Для общего члена разложения имеем:

$T_{m+1} = C_{16}^m(\sqrt[3]{x})^{16-m} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^m = C_{15}^m x^{\frac{16-m}{3}} x^{-m} = C_m^{15} x^{\frac{16-4m}{3}}.$

Член разложения не зависит от x, это означает, что показатель степени x равен 0, то есть $\dfrac{16-m}{3} = 0$, отсюда $m = 4$.

Итак, пятый член данного разложения не содержит x.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.1. «Простейшие комбинаторные задачи»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Сколько пятизначных чисел можно записать при помощи цифр 5, 6, 7, 8, 9 без повторения цифр?

B2

B2. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди них чисел, начинающихся с 5?

B3

B3. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

B4

B4. Сколько существует отрезков, концами которых являются 10 данных точек?

B5

B5. Сколько различных плоскостей можно провести через 10 точек пространства, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, если каждая плоскость проходит через три заданные точки?

B6

B6. В турнире участвовало 9 шахматистов, и каждые два шахматиста сыграли друг с другом один раз. Сколько матчей было сыграно в турнире?

B7

B7. 12 учеников пожали друг другу руки перед соревнованиями. Сколько было сделано рукопожатий?

B8

B8. 15 учеников обменялись фотографиями таким образом, что все обменялись друг с другом. Сколько было роздано фотографий?

B9

B9. Сколько различных прямых можно провести через 5 точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой?

B10

B10. Во взводе 5 сержантов и 30 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и трех солдат?

B11. Сколько человек принимало участие в шахматном турнире, если известно, что все участники сыграли друг с другом по одной партии, а всего было сыграно 210 партий?

B11

B12. Сколькими способами можно выбрать 3 различные краски из 5 различных красок?

B12

B13. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг разных авторов?

B13

B14. Сколько пятизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9?

B14

B15. В шахматном турнире принимали участие 6 шахматистов. Участники турнира сыграли друг с другом только по одной партии. Сколько всего шахматных партий было сыграно в этом турнире?

B15

B16. Сколько можно составить различных двузначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, не повторяя цифры в числе?

B16

B17. В кафе 9 видов мороженого. Сколько всего существует способов заказать десерт из трех разных видов мороженого?

B17

B18. Сколько всего шестизначных чисел, которые делятся на 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (в каждом числе цифры не должны повторяться)?

B18

6.2. Вероятность событий: вычисление вероятности событий на основе подсчета числа исходов

6.2.1. Основные понятия теории вероятностей

Первичным понятием теории вероятностей является понятие события.

Событие — это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит при определенных условиях. События обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C... Любое событие происходит вследствие испытания (эксперимента, исследования).

Испытание — это условия, в результате которых происходит (или не происходит) событие.

Например, испытание — подбрасывание монеты, события: A — «появление герба», B — «появление числа»; испытание — подбрасывание кубика, события: A — «появление 1 очка», B — «появление 2 очков», C — «появление 3 очков», D — «появление 4 очков», E — «появление 5 очков», G — «появление 6 очков).

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти во время проведения определенного испытания.

Например: во время вытягивания наугад одной карты из колоды вы взяли короля. Событие A — «взят король» — является случайным.

Случайные события могут быть массовыми и единичными.

Массовыми называют однородные события, наблюдающиеся при определенных условиях, которые могут быть повторены (можно наблюдать) неограниченное количество раз.

Например, попадание или промах в серии выстрелов; появление бракованных деталей при серийном выпуске; радиоактивный распад атомов вещества и др.

Примером единичного случайного события является падение Тунгусского метеорита.

Теория вероятностей изучает только массовые случайные события.

Достоверным называется событие, которое вследствие данного испытания обязательно произойдет.

Например, событие A — «появление на одной из граней игрального кубика натурального числа меньше 7» — является достоверным.

Невозможным называется событие, которое вследствие данного испытания не может произойти.

Например, событие A — «появление на одной из граней игрального кубика числа 7».

Полной группой событий называется множество событий, таких, что в результате каждого испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Например: в испытании — бросок игрального кубика — полную группу событий составляют события:

A_1 — «появление числа 1»;
A_2 — «появление числа 2»;
A_3 — «появление числа 3»;
A_4 — «появление числа 4»;
A_5 — «появление числа 5»;
A_6 — «появление числа 6»...
или события:
B_1 — «появление четного числа»;
B_2 — «появление нечетного числа».

Попарно несовместимые события — это события, два из которых не могут произойти одновременно.

Например, попадание и промах при одном выстреле — это два несовместных события; появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном броске игрального кубика — это шесть несовместимых событий.

Равновозможные события — это такие события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще, чем другое, во время многоразовых испытаний, которые проводятся при одинаковых условиях.

Например, появление чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при броске игрального кубика — равновозможные события.

Если события:

1) образуют полную группу событий;

2) являются несовместимыми;

3) являются равновозможными,

то такие события образуют *пространство элементарных событий*.

6.2.2. Классическое определение вероятности

Рассмотрим испытание — бросок игрального кубика; пространство элементарных событий состоит из событий:

A_1 — «появление числа 1»;

A_2 — «появление числа 2»;

A_3 — «появление числа 3»;

A_4 — «появление числа 4»;

A_5 — «появление числа 5»;

A_6 — «появление числа 6».

Рассмотрим событие A — «выпало четное число». Событию A соответствуют элементарные события: A_2, A_4, A_6.

Отношение числа событий, которые способствуют событию A, к общему количеству событий пространства элементарных событий, называется **вероятностью случайного события** A и обозначается $P(A)$.

В приведенном примере $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Итак,

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где A — событие; $P(A)$ — вероятность события; n — общее количество событий пространства элементарных событий; m — число событий, которые способствуют событию A.

Это классическое определение вероятности было введено основателями теории вероятностей Б. Паскалем и П. Ферма. Вероятность достоверного события равна 1. Вероятность невозможного события равна 0.

Пример 1. Найдите вероятность того, что при броске двух монет выпадет два герба.

Решение. Пусть событие A — «выпало два герба».

Пространство элементарных событий состоит из четырех событий: A_1 — «выпало два герба»; A_2 — «выпали герб и число»; A_3 — «выпали число и герб»; A_4 — «выпали два числа».

Событию A способствует только событие A_1.

Итак, $m = 1$, $n = 4$, и тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

6.2.3. Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий

Непосредственный подсчет вероятностей событий значительно упрощается, если использовать формулы комбинаторики. Правильность решения задачи зависит от умения определить вид соединения, образуемого совокупностью событий, о которых идет речь в условии задачи. Вспомним алгоритм определения вида соединений. Рассмотрим примеры решения задач.

П р и м е р 1. В урне лежат 20 шариков, из которых 12 белых, остальные — черные. Из урны наугад вынимают два шарика. Какова вероятность того, что они белые?

Решение. Общее количество элементарных событий испытания (вынуты два шарика) равно числу способов, какими можно вынуть 2 шарика из 20, то есть числу сочетаний из 20 элементов по 2 $(n = C_{20}^2)$. Подсчитаем количество элементарных событий, которые способствуют событию «вынуты два белых шарика». Это количество равно числу способов, которыми можно вынуть 2 шарика из 12 белых, то есть числу сочетаний из 12 элементов по 2 $(m = C_{12}^2)$.

Итак, если событие A — «вынуты два белых шарика», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}.$$

Ответ: $\frac{33}{95}$.

П р и м е р 2. В урне лежат 20 шариков, из которых 12 белых, остальные — черные. Из урны наугад вынимают три шарика. Какова вероятность того, что среди выбранных два шарика белые?

Решение. Общее количество элементарных событий испытания (вынуты три шарика) равно $n = C_{20}^2$.

Подсчитаем количество элементарных событий, которые способствуют событию «среди трех выбранных шариков два белых». Два белых шарика из 12 белых шариков можно выбрать C_{12}^2 способами, а один черный шарик можно выбрать 8 способами, тогда событию «среди трех выбранных шариков два белых» способствуют $m = C_{12}^2 \cdot 8$ элементарных событий.

Итак, если событие A — «среди трех выбранных шариков два белых», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}.$$

Ответ: $\frac{44}{95}$.

П р и м е р 3. В урне лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шариков, одинаковых на ощупь. Наугад вынимают 6 шариков. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шарика?

Решение. В этой задаче испытание состоит в том, что из урны вынимают 6 шариков. Вынуть шесть шариков из 15 + 9 + 6 = 30 шариков можно $n = C_{20}6$ способами. Нас интересует вероятность события A — «вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шарика». Один зеленый шарик можно вынуть C_6^1 способами, 2 синих шарика можно вынуть C_9^2 способами, 3 красных шарика можно вынуть C_{15}^3 способами. Итак, событию A способствуют $m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1$ элементарных событий. Тогда

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}.$$

Ответ: $\frac{24}{145}$.

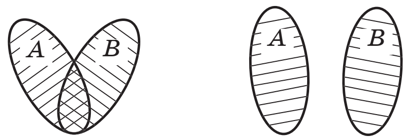
6.2.4. Операции над событиями

Вычислять вероятность событий, строя каждый раз множество элементарных событий и подсчитывая число событий, которые способствуют этому событию, иногда трудно. Поэтому для вычисления вероятностей пользуются правилами, которые позволяют по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других событий, которые образуются из них с помощью некоторых операций.

Суммой событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении во время единичного испытания или события A, или события B, или двух событий одновременно.

Сумму двух событий обозначают так:

$$C = A + B \text{ или } C = A \cup B.$$



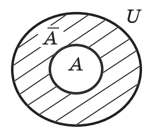
а *б*

Графически сумму событий можно изобразить как объединение множеств. Сумму событий A и B, как и сумму множеств, называют **объединением**. На рисунке, *а* изображено объединение (сумма) совместимых событий A и B, на рисунке *б* изображена сумма двух несовместимых событий A и B, которая состоит в выполнении или события A, или события B (одновременное появление событий A и B исключено).

Пример 1. Если событие A — «попадание в цель с первого выстрела», событие B — «попадание в цель со второго выстрела», то событие $C = A + B$ — «попадание в цель».

Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит. (Читается: «не A»).

Пример 2. Если событие A — «попадание в цель при выстреле», то событие $\overline{A}$ — «промах при выстреле».

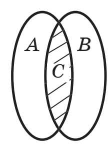


Пример 3. Если событие A — «взята стандартная деталь» при испытании — наугад взята деталь из ящика, то $\overline{A}$ — «взята нестандартная деталь».

Для любого события A имеют место равенства:

$$A + U = U; \; A + A = A; \; A + \overline{A} = U; \; A + \varnothing = A.$$

Произведением событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении двух событий A и B во время единичного испытания.



Произведение двух событий A и B обозначают так: $C = A \cdot B$ или $C = AB$, или $C = A \cap B$.

Графически произведение двух событий, как и двух множеств, изображается так, как на рисунке.

Для любого события A и полной группы несовместных событий U имеют место равенства:

$$A \cdot A = A; \; A \cdot \varnothing = \varnothing; \; A \cdot \overline{A} = \varnothing; \; A \cdot U = A.$$

Пример. Если событие A — «первый стрелок попал в цель», событие B — «второй стрелок попал в цель», тогда событие $C = A \cdot B$ — «в цель попали оба стрелка».

В теории вероятностей различают простые и сложные события. Например, во время броска двух монет событие A — «на первой монете выпал герб» — является простым.

Событие называется **сложным**, если появление его зависит от появления других, простых событий. Например, во время броска двух монет событие A — «выпал хотя бы один герб» — сложное, потому что оно состоит из таких событий:

A_1 — «выпал герб только на первой монете»;

A_2 — «выпал герб только на второй монете»;

A_3 — «выпал герб на двух монетах»;

то есть

$$A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 + A_2.$$

6.2.5. Вероятность сложных событий

Вероятность суммы несовместимых событий

Теорема. **Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий.**

Если $A \bigcap C = \varnothing$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример 1. В урне лежат 2 черных, 3 красных, 9 зеленых, 6 синих шариков. Из нее наугад вынимают один шарик. Какова вероятность того, что он не черный?

Решение. Пусть событие A — «появление не черного шарика», A_1 — «появление черного шарика», A_2 — «появление красного шарика», A_3 — «появление зеленого шарика», A_4 — «появление синего шарика». Тогда $A = A_2 + A_3 + A_4$, причем A_2, A_3, A_4 — несовместимые, $P(A_2) = \dfrac{3}{20}$, $P(A3) = \dfrac{9}{20}$, $P(A_4) = \dfrac{6}{20}$. По теореме о вероятности суммы несовместимых событий получаем:

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{3}{20} + \frac{9}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{9}{10}$.

Из теоремы о вероятности суммы несовместных событий вытекают два следствия.

Следствие 1. **Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, которые образуют полную группу и попарно несовместимы, равна единице.**

$$P(A_1) + PA(_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2. **Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример 2. В коробке есть 20 деталей, из которых 15 стандартных. Найдите вероятность того, что среди 3 выбранных наугад деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. Событие A — «среди выбранных деталей есть хотя бы одна стандартная», событие $\bar{A}$ — «все выбранные детали нестандартные». Согласно следствию 2 имеем: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, отсюда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Найдем $P(\bar{A})$. Общее число способов, которыми можно выбрать 3 детали из 20 деталей, равно $n = C_{20}^3$. Число нестандартных деталей $20 - 15 = 5$, из этого числа деталей можно $m = C_5^3$ способами выбрать 3 нестандартные детали.

Итак, $P(\bar{A}) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_5^3}{C_{20}^3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \dfrac{1}{114}$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{1}{114} = \dfrac{113}{114}$.

Ответ: $\dfrac{113}{114}$.

6.2.6. Независимые события

Два события называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло второе событие или нет.

Пример 1. Монета бросается дважды. Вероятность появления герба в первом испытании не зависит от появления или непоявления герба во втором испытании. В свою очередь, вероятность появления герба во втором испытании не зависит от результатов первого испытания. Итак, событие A — «появление герба в первом испытании» — и событие B — «появление герба во втором испытании» — независимы.

Пример 2. В урне 5 белых и 4 черных шарика. Из нее наугад берут шарик. Вероятность появления белого шарика (событие A) равна $\frac{5}{9}$. Взятый шарик возвращают в урну и продолжают испытание. Вероятность появления белого шарика при втором испытании (событие B) также равна $\frac{5}{9}$. В свою очередь, вероятность вынуть белый шарик при первом испытании не зависит от второго испытания. Итак, события A и B — независимы.

Вероятность произведения независимых событий

Теорема. **Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий, то есть**

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 1. Найдите вероятность одновременного выпадение герба на двух монетах при одном броске двух монет.

Решение. Событие A — «выпал герб на первой монете», $P(A) = \frac{1}{2}$. Событие B — «выпал герб на второй монете», $P(B) = \frac{1}{2}$.

Так как события A и B независимы, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 2. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7 и 0,8. Найдите вероятность того, что оба охотника попадают в цель.

Решение.

Событие A — «первый охотник попал в цель», $P(A) = 0{,}7$.

Событие B — «второй охотник попал в цель», $P(B) = 0{,}8$.

Событие $C = A \cdot B$ — «оба охотника попали в цель», тогда

$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Ответ: 0,56.

Пример 3. Два охотника стреляют в цель одновременно и независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель соответственно равны 0,7 и 0,8. Найдите вероятность того, что:

а) только один из охотников попадет в цель;

б) ни один из охотников не попадет в цель;

в) хотя бы один охотник попадет в цель.

Решение.

Событие A — «первый охотник попал в цель», $P(A) = 0{,}7$.

Событие B — «второй охотник попал в цель», $P(B) = 0{,}8$.

а) $C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$ — «только один из охотников попал в цель», тогда

$$P(C) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot (1 - P(B)) + (1 - P(A)) \cdot 0{,}8 =$$

$$= 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

б) $D = \bar{A} \cdot \bar{B}$ — «ни один из охотников не попал в цель», тогда

$$P(D) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

в) $F = \bar{D}$ — «хотя бы один из охотников попадет в цель».

1 способ

$P(F) = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

2 способ

$F = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + AB$, тогда

$P(F) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 =$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}56 = 0{,}14 + 0{,}24 + 0{,}56 = 0{,}94$.

Ответ: а) 0,38; б) 0,06; в) 0,94.

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий

Во время решения задач иногда приходится определять вероятность выполнения хотя бы одного из независимых событий A_1, A_2, ..., A_n, вероятности которых известны.

Теорема. **Если события A_1, A_2, A_3, ..., A_n — независимы, то вероятность выполнения хотя бы одного из них может быть выражена через вероятность этих событий по формуле:**

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Следствие. **Если события A_1, A_2, A_3, ..., A_n имеют одинаковую вероятность p, то вероятность выполнения хотя бы одного из них**

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Рассмотрим применение этой теоремы к решению задач.

Пример 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех пушек соответственно равны 0,8; 0,7 и 0,9. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех пушек.

Решение. Вероятность попадания в цель каждой из пушек не зависит от результатов стрельбы из других пушек, поэтому события A_1 – «попадание первой пушкой», A_2 — «попадание второй пушкой», A_3 — «попадание третьей пушкой» независимы. Если A — «хотя бы одно попадание», то

$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_2)) =$
$= 1 - (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}9) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994$.

Ответ: 0,994.

Пример 2. В типографии находятся 4 типографские машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найдите вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Решение. Пусть событие A — «работает в данный момент хотя бы одна машина», тогда по следствию из теоремы:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n = 1 - (1 - 0{,}9)^4 = 0{,}9999$.

Ответ: 0,9999.

Пример 3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен выполнить стрелок, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Событие A — «при n выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз».

Согласно следствию из теоремы имеем:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n$.

Так как $P(A) \geq 0{,}9$, $p = 4$, то получим:

$1 - (1 - 0{,}4)^n \geq 0{,}9$;

$0{,}6^n \leq 0{,}1$;

$n \lg 0{,}6 \leq \lg 0{,}1$, так как $\lg 0{,}6 < 0$,

то $n \geq \dfrac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6} = \dfrac{-1}{-0{,}2218} = 4{,}5$.

Итак, $n \geq 5$, то есть стрелок должен сделать не меньше 5 выстрелов.

Ответ: не меньше 5.

П р и м е р 4. Вероятность того, что событие произойдет хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,936. Найдите вероятность выполнения события в одном испытании, если известно, что во всех испытаниях вероятность выполнения события одна и та же.

Решение. Согласно следствию из теоремы:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n$.

По условию $P(A) = 0{,}936$, $n = 3$, тогда

$0{,}936 = 1 - (1 - p)^3$; $(1 - p)^3 = 0{,}064$; $1 - p = 0{,}4$; $p = 1 - 0{,}4$; $p = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

6.2.7. Зависимые события

Два события называют зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от появления или непоявления второго события.

П р и м е р. В ящике 100 деталей: 80 стандартных и 20 нестандартных. Наугад берут одну деталь, не возвращая ее. Если появилась стандартная деталь (событие A), то вероятность появления стандартной детали при втором испытании (событие B) $P(B) = \frac{79}{99}$; если же в первом испытании вынут нестандартную деталь, то вероятность $P(B) = \frac{80}{99}$. Итак, вероятность появления события B зависит от появления или непоявления события A. События A и B — зависимые.

Пусть события A и B — зависимые, и событие A уже произошло.

Число, которое выражает вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, называется **условной вероятностью** события B относительно события A и обозначается $P(B \backslash A)$ или $P_A(B)$.

Пусть k — количество всех элементарных событий, которые способствуют событию A;

n — количество всех элементарных событий некоторого испытания;

m — количество элементарных событий, которые способствуют событию B;

r — количество элементарных событий, которые способствуют событию $A \cdot B$ ($r \le k$ и $r \le m$).

Если событие A произошло, то это означает, что произошло одно из элементарных событий, которые способствуют событию A. При этом событию B способствуют r и только r событий, которые способствуют событию $A \cdot B$.

Поэтому $P_A(B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$, отсюда

$$P(A \cdot B) = P_A(B) \cdot P(A).$$

Вероятность произведения зависимых событий

Теорема. **Вероятность произведения зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго события, если первое уже произошло.**

П р и м е р 1. В урне 3 белых и 7 красных шариков. Наугад вынимают один шарик, а потом второй. Найдите вероятность того, что из вынутых шариков первый будет белым, а второй — красным.

Решение. Событие A — «первым взят белый шарик», $P(A) = \frac{3}{10}$.

Вероятность того, что второй из шариков будет красным (событие B), найдена при условии, что первый — белый, то есть условная вероятность равна $P_A(B) = \frac{7}{9}$.

Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей зависимых событий равна:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Ответ: $\frac{7}{30}$.

6.2.8. Независимые испытания. Схема Бернулли

Взаимно независимыми называются такие испытания, в которых вероятность результата каждого из них не зависит от того, какие результаты имеют или будут иметь остальные испытания.

Многие задачи в теории вероятностей приводятся к следующей схеме, которая называется схемой Бернулли: происходит n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может случиться или не случиться. Вероятность выполнения события A в каждом испытании одинакова и равна p, а вероятность невыполнения события A $q = 1 - p$. Необходимо найти вероятность $P_{m,\,n}$ того, что событие A случится m раз в этих n испытаниях.

Искомую вероятность можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}.$$

Выведение формулы Бернулли

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A случится m раз и не случится $n - m$ раз, по теореме о произведении вероятностей независимых событий равна $p^m q^{n-m}$.

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить комбинаций из n элементов по m элементов, то есть C_n^m.

Так как эти сложные события несовместимы, то по теореме сложения вероятностей несовместимых событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Так как вероятность всех сложных событий одинакова, то искомая вероятность (случится m раз событие A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события $p^m q^{n-m}$, умноженной на их число C_n^m, то есть

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$$

или

$$P_{m,\,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

П р и м е р 1. Вероятность того, что расход электроэнергии на протяжении суток не превышает установленной нормы, равна 0,75. Найдите вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии на протяжении 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии на протяжении каждых 6 суток постоянна и равна $p = 0{,}75$. Итак, вероятности перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянны и равны

$q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_{4,\,5} = C_6^5 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}30.$$

Ответ: 0,30.

П р и м е р 2. Какова вероятность того, что при десяти бросках игрального кубика 3 очка выпадет 2 раза?

Решение. В этой задаче $n = 10$, $m = 2$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, и тогда

$$P_{2,\,10} = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5^{8}}{6^{10}} \approx 0,29.$$

Ответ: $\approx 0,29$.

6.2.9. Статистическое определение вероятности

Вероятность случайного события мы определили как отношение количества событий, которые способствуют этому событию, к количеству всех равновозможных несовместимых событий, образующих полную группу событий во время определенного испытания. Такое определение вероятности называется классическим.

Классическое определение вероятности имеет определенные недостатки, а именно:
1) с помощью этого определения можно вычислять вероятность только для конечного количества элементарных событий;
2) в случае бесконечного количества элементарных событий определение использовать невозможно;
3) вычисление количества элементарных событий иногда очень громоздкое;
4) вывод о равновозможности элементарных событий делается без логических обоснований.

Поэтому наряду с классическим определением пользуются также статистическим определением вероятности.

Проведем испытание — подбрасывание монеты. Во время одноразового проведения испытания мы никаких закономерностей не заметим. Закономерности начинают выявляться тогда, когда эксперимент выполняют много раз в одинаковых условиях. В таблице приведены результаты экспериментов с подбрасыванием монеты, проведенных разными исследователями.

Исследователь	**Ж. Бюффон**	**О. де Морган**	**К. Пирсон**	**В. Феллер**	**У. Джевонс**	**В. Романовский**
Количество подбрасываний монеты — n	4040	4092	12 000	10 000	20 450	50 640
Количество выпадании герба — m	2048	2048	6019	4979	10 379	40 151
Отношение $\frac{m}{n}$	0,5069	0,5005	0,5010	0,4979	0,5068	0,4979

Из таблицы видно, что отношение $\frac{m}{n}$, то есть отношение количества выпаданий герба к общему количеству бросков монеты, колеблется около числа 0,5. Данные таблицы показывают, как предвидение того, что герб выпадет с вероятностью 0,5, хорошо согласуется с исследованием.

Дадим статистическое определение вероятности.

Пусть n — количество всех испытаний в отдельной серии испытаний, а m — количество тех испытаний, в которых происходит событие A. Отношение $\frac{m}{n}$ называется относительной частотой события A в данной серии испытаний. Выясняется, что в разных сериях испытаний соответствующие частоты $\frac{m}{n}$ для больших n практически совпадают, колеблясь около некоторого постоянного значения $P(A)$, которое называется **статистической вероятностью** события:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ или } P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

Понятие статистической вероятности широко используется в биологии, медицине, инженерном деле, экономике и других науках.

Пример. Количество рыб в озере неизвестно. Из озера поймали n рыб и пометили их, а затем выпустили в озеро. Через несколько дней в такую же погоду снова забросили невод и в нем оказалось m рыб, из которых k помеченных. Укажите приблизительное количество рыб в озере.

Решение. Пусть событие A — «пойманная рыба помечена», тогда $P(A) = \frac{k}{m}$. Но если в озере x рыб, среди которых n рыб помечены, то $P(A) = \frac{n}{x}$. Итак, $\frac{k}{m} = \frac{n}{x}$, отсюда $x = \frac{mn}{k}$.

Ответ: $\frac{mn}{k}$.

6.2.10. Закон больших чисел

На практике нередко бывает трудно определить, какова вероятность какого-нибудь события. В то же время можно на основании испытаний (наблюдений) сказать, какова частота появления события, если одно и то же испытание повторяется много раз.

Еще Якоб Бернулли (1654–1705), известный швейцарский математик, заметил следующую интересную закономерность, которая носит название «закона больших чисел»: чем больше выполняется однотипных испытаний, тем ближе частота появления события к вероятности этого события. Точнее, **теорема Бернулли** утверждает: если в ряде испытаний вероятность некоторого события остается для каждого испытания постоянной и равной p, то при достаточно большом количестве испытаний практически вероятно, что частота $\frac{m}{n}$ появления события отличается от ее вероятности меньше, чем на сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$.

Итак, теорема Бернулли математически подтверждает нашу интуитивную убежденность в том, что при большом количестве испытаний должно выполняться приближенное равенство $\frac{m}{n} \approx p$.

В случаях, когда вероятность события неизвестна, закон больших чисел позволяет принять за вероятность события ее частоту, вычисленную при достаточно большом количестве испытаний.

Пример. Рассматривая данные о рождении детей, можно сделать вывод: частота рождения мальчиков при достаточно большом количестве наблюдений за рождаемостью близка к числу 0,511, поэтому это число и принимается за вероятность рождения мальчика. Знание этой вероятности позволяет делать демографические прогнозы.

Решение задач

Для решения задач на нахождение вероятностей одного события из условия, что другое произошло, используют определенный алгоритм.

1. Обозначить все события, о которых идет речь в задаче.
2. Выяснить и записать символами то, что известно по условию задачи, и то, что необходимо найти.
3. Выразить событие, вероятность которого необходимо найти, через события, вероятности которых известны или их легко можно найти.
4. Вычислить искомую вероятность, используя изученные теоремы, определения.

Пример. В шкатулке лежат 6 шаров, 3 из которых — красные. Наугад взяты 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара — красные?

Решение.

1 способ

Пусть событие A — «взятые два шара — красные»; n — количество возможностей выбора двух шаров из шести, $n = C_6^2$; m — количество возможностей выбора двух красных шаров из трех, $m = C_3^2$, тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_6^3} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

2 способ

Пусть событие A — «первый взятый шар — красный», $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; событие B — «второй взятый шар — красный», $P(B) = \frac{2}{5}$; событие C — «оба взятых шара — красные», тогда $C = A \cdot B$.

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.2. «Вероятность событий»

Часть 1

Ответом на задания B1–B18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать без указания единиц измерения.

B1

B1. Игральный кубик бросают дважды. Какова вероятность того, что шестерка выпадет только один раз?

B2

B2. Из 10 изготовленных деталей 3 детали оказались с дефектами. Какова вероятность того, что выбранные наугад 2 детали будут без дефектов?

B3

B3. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания равна соответственно 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что оба охотника попадут в мишень?

B4

B4. В коробке 5 белых и 7 черных шаров. Из коробки наугад выбирают шар. Какова вероятность того, что этот шар белым?

B5

B5. В коробке 6 белых и 5 черных шаров. Из коробки вынимают один шар и откладывают его в сторону, он оказывается белым. После этого из коробки вынимают еще один шар. Какова вероятность того, что он тоже окажется белым?

B6

B6. Куб, все грани которого раскрашены, разрезали на 1000 равных кубиков. Какова вероятность того, что наугад выбранный кубик имеет только две раскрашенные грани?

B7

B7. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания равна соответственно 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что лишь один из охотников попадет в цель?

B8

B8. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартные), а во втором — 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей окажется хотя бы одна стандартная?

B9

B9. Трое стрелков, для которых вероятности попадания в цель соответственно равны 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что только два из стрелков попадут в цель?

B10

B10. Трое стрелков, для которых вероятность попадания в цель соответственно равна 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что только один из них попадет в цель?

B11. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартные), а во втором — 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей окажется хотя бы одна нестандартная?

B11

B12. Имеется пять отрезков длиной 1, 3, 4, 7 и 9 см. Определите вероятность того, что из трех наугад выбранных отрезков (из данных пяти) можно построить треугольник?

B12

B13. Трое стрелков, для которых вероятность попадания в цель соответственно равны 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в цель?

B13

B14. В ящике 4 белых, 5 красных и несколько синих шаров. Найдите общее количество шаров в ящике, если вероятность вынуть наугад синий шар равна 0,25.

B14

B15. В сумке лежат яблоки, среди них 8 красных, остальные — желтые. Найдите количество желтых яблок, если вероятность вынуть из сумки наугад красное яблоко равна 0,4.

B15

B16. Отдел доставки пиццерии получил заказ на фирменную пиццу и другие три вида пиццы, причем 80 % клиентов заказали фирменную пиццу. Определите вероятность того, что среди двух наугад выбранных заказов будет только один на фирменную пиццу.

B16

B17. Участнику телевизионного шоу разрешается открыть любые два сейфа из пяти предложенных (в двух из них лежат призы, остальные — пустые). Определите вероятность получения двух призов.

B17

B18. Вероятность успешного прохождения во II тур «Евровидения» двух музыкальных групп равна 0,6 и 0,7 соответственно. Определите вероятность того, что обе группы не пройдут во II тур.

B18

6.3. Решение практических задач: анализ диаграмм и графиков, анализ информации статистического характера

6.3.1. Понятие о статистике и ее методах. Статистические таблицы

Объективный анализ любых массовых явлений и процессов требует научных методов сбора, обработки данных и интерпретации полученных результатов. **Статистика** — наука, которая собирает, обрабатывает и изучает данные, связанные с разными массовыми явлениями, процессами, событиями. Предметом изучения статистики является изучение количественной стороны этих явлений. Статистика учит, как проанализировать информацию, выявить и оценить закономерности формирования, развития и взаимодействия сложных по своей природе социально-экономических явлений.

Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и исследования статистических данных для научных и практических выводов. Ее широко используют социально-экономические дисциплины и другие отрасли, а именно: астрономия (распределение и движение звезд в небесном пространстве), физика (термодинамика), биология (законы наследственности), гидрология (прогноз погоды), индустрия (контроль качества изделий) и др.

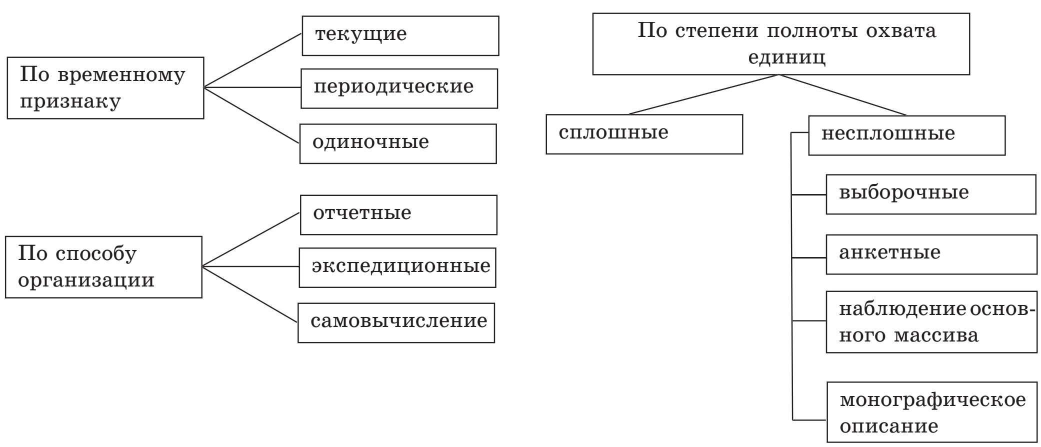
Первым этапом любого исследования является сбор информации, а именно статистическое наблюдение.

Статистическое наблюдение — это спланированный, научно организованный сбор массовых данных о социально-экономических явлениях и процессах.

Примерами статистических наблюдений могут быть: ежедневный учет посещения; учет успеваемости за семестр; перепись населения; анкетирование; список религиозных общин страны; исследование финансовой деятельности инвестиционной компании; регистрация браков в загсах; опрос отдельных участников презентации; учет числа зарегистрированных преступлений; регистрация уровня цен на сельскохозяйственные продукты; телефонный опрос и др.

На схеме представлены разные виды статистических наблюдений.

Виды статистических наблюдений



Самым распространенным среди видов статистических наблюдений является выборочное наблюдение. В процессе выборочного наблюдения изучается только часть совокупности, выбранная специальным методом, которая называется **выборкой**. Всю совокупность, из которой делают выборку, называют **генеральной совокупностью**. Число объектов генеральной совокупности и выборки называют соответственно **величиной генеральной совокупности и величиной выборки**.

Пример 1. Если из 1000 деталей отобраны для обследования 100 деталей, то величина генеральной совокупности $N = 1000$, а величина выборки $n = 100$.

Пример 2. Если из всех 20 млн работающих в Украине объектом исследования экономисты выбрали 1000 человек, то величина генеральной совокупности $N = 20$ млн чел., а величина выборки $n = 1000$ чел.

Идея выборочного наблюдения состоит в том, чтобы, анализируя отобранную определенным образом часть единиц (объектов) всей совокупности, распространить результаты и выводы на всю совокупность в целом. Суть выборочного наблюдения удачно пояснил один из директоров Института Геллапа: «...для того чтобы оценить вкус супа, совсем не обязательно съесть его полностью, необходимо хорошо перемешать его и попробовать только одну ложку».

Для того чтобы по выборке можно было с уверенностью сделать вывод о всей генеральной совокупности, необходимо, чтобы выборка достаточно точно отображала то свойство объектов генеральной совокупности, которое изучают. Выборка должна быть представительная, то есть отбор объектов в выборку производится случайно.

В результате статистического наблюдения получают материал, который характеризует отдельные элементы совокупности. После сведения и группировки статистических данных для наиболее рационального и научного вида их результатов используют статистические таблицы.

Статистические таблицы имеют подлежащее и сказуемое. **Статистическое подлежащее** — это список отдельных объектов или групп объектов. **Статистическое сказуемое** — это те признаки или показатели, которые характеризуют статистическое подлежащее.

По структуре подлежащего статистические таблицы подразделяются на простые, групповые и комбинационные.

В таблицах информация подается компактно, в удобной для сравнения и анализа форме. Вид таблицы зависит от цели и особенностей объекта исследования, объема имеющейся информации.

В математической статистике вместо слова «данные» используется термин «варианта». Числовую характеристику варианты при этом называют **признаком**. Варианты, записанные в таблице в возрастающем (убывающем) порядке, называют **вариационным рядом**. Вариационные ряды бывают дискретными и интервальными.

Пусть выборочные данные содержат m вариант x_1, x_2, ..., x_m, причем некоторый признак X принял значение x_1 n_1 раз, значение x_1 — n_1 раз, ..., x_m — m раз. Положительное число, которое указывает, сколько раз та или иная варианта встречается, называется **частотой**.

Таблица, которая устанавливает связь между рядом вариант и соответствующими частотами, называется частотной таблицей, или **статистическим распределением**.

x_1	x_1	x_1	...	x_m
n_1	n_1	n_1	...	n_m

Здесь N — величина выборки $N = n_1 + n_2 + ... + n_m$.

Пример. Производителям одежды необходимо знать, сколько одежды того или иного размера необходимо выпускать. Опросили 50 женщин, их размеры одежды такие: 44, 50, 48, 48, 52, 50, 52, 48, 46, 50, 50, 52, 54, 46, 48, 48, 54, 52, 46, 50, 52, 48, 46, 50, 52, 50, 48, 50, 54, 48, 48, 50, 52, 46, 52, 56, 50, 44, 56, 50, 52, 48, 56, 54, 46, 54, 50, 56, 54, 50. Составьте частотную таблицу.

Ответ:

Размер одежды	44	46	48	50	52	54	56
Количество женщин	2	6	10	13	9	6	4

6.3.2. Ряд распределения. Наглядное изображение статистического распределения

Пусть из генеральной совокупности сделана выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, x_3 — n_3 раз, ..., x_m — n_m и $n_1 + n_2 + ... + n_m = N$ — объем выборки. Значения $x_1, x_2, ..., x_m$ называют вариантами, последовательность вариант, записанных в возрастающем (убывающем) порядке, — вариационным рядом. Число наблюдений $n_1, n_2, ..., n_m$ называют частотами, а их отношения к объекту выборки $\frac{n_1}{N} = p_1,\ \frac{n_2}{N} = p_2,\ ...,\ \frac{n_m}{N} = p_m$ — относительными частотами. Отметим, что сумма относительных частот равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_m}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Статистическим рядом распределения выборки называется список вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот.

П р и м е р 1. Перейдите от частот к относительным частотам в следующем распределении выборки объемом $N = 20$.

Варианта x_1	2	6	12
Частота n_1	3	10	7

Решение. Найдем относительные частоты:

$$p_1 = \frac{3}{20} = 0,15;\quad p_2 = \frac{10}{20} = 0,50;\quad p_3 = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Получим следующее распределение.

Варианта x_1	2	6	12
Относительная частота p_1	0,15	0,50	0,35

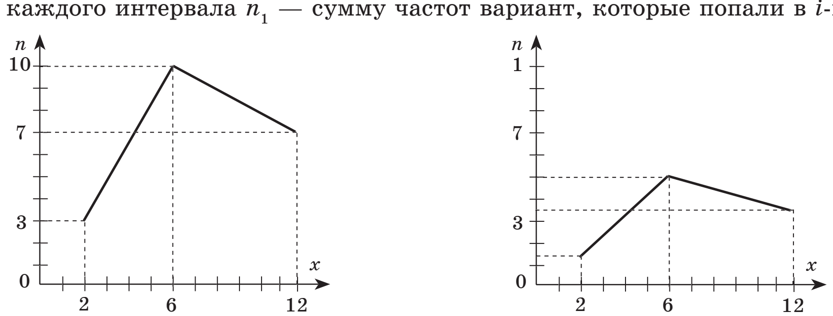
Для графического изображения статистического распределения используют полигоны и гистограммы.

Для построения полигона на оси OX откладывают значения вариант x_1, а на оси ординат — значения частот n_1.

Точки $(x_1;\ n_1)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

П р и м е р 2. Постройте полигон частот и полигон относительных частот статистического распределения из примера 1.

На рисунке *а* построен полигон частот, а на рисунке *б* — полигон относительных частот. В случае интервального распределения целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором находятся все значения наблюдаемого признака, разбивают на несколько интервалов длиной h и находят для каждого интервала n_1 — сумму частот вариант, которые попали в i-й интервал.



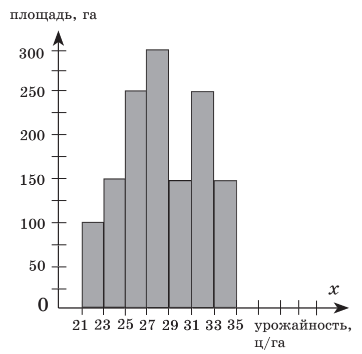
а *б*

Урожайность, ц/га	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31	31–33	33–35	Всего
Площадь, га	100	150	250	300	150	250	150	1200

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, которая состоит из прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длиной h, а высота равна отношению $\frac{n_i}{h}$. Площадь i-го прямоугольника равна $\frac{h \cdot n_i}{h} = n_i$.

Итак, площадь гистограммы равна сумме всех частот, то есть объему выборки.

Построим гистограмму по данным таблицы.



6.3.3. Мода и медиана. Средние значения

Выборка характеризуется **центральными тенденциями**: средним значением, модой и медианой. Дадим определение каждой из них. **Средним значением выборки** называется среднее арифметическое всех ее значений:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \text{ или } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Мода выборки — это то ее значение, которое встречается чаще всего. Обозначается Mo. **Медиана выборки** — это число, которое «разделяет пополам» упорядоченную совокупность всех значений выборки, то есть средняя величина переменного признака, который содержится в середине ряда, расположенного в порядке возрастания или убывания признака. Обозначают Me.

Пример. Пусть дана выборка: 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8. Найдем центральные тенденции выборки.

Решение. Мода данной выборки $Mo = 6$, так как число 6 встречается чаще всего.

Среднее значение выборки:

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+4+6+6+6+7+7+8}{10} = \frac{53}{10} = 5,3.$$

Медиана данной выборки $Me = 6$, потому что выборка имеет четное число значений и ее медиана равна полусумме двух ее средних значений:

$$Me = \frac{6+6}{2} = 6.$$

Тренировочные тестовые задания к разделу 6 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятности»

Часть 1

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий B1–B12 ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

B1

B1. Игральный кубик подбрасывают дважды. Определите вероятность того, что при двух бросках выпадет разное количество очков. Результат округлите до сотых.

B2

B2. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найдите вероятность того, что наугад выбранные 2 детали будут стандартными. Результат запишите с точностью до сотых.

B3

B3. Игральный кубик подбрасывают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите с точностью до сотых.

B4

B4. В ящике лежат 8 белых и 12 красных одинаковых на ощупь шаров. Наугад выбирают 3 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белый? Результат округлите до десятых.

B5

B5. Берут наугад трехзначное натуральное число от 100 до 999. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры совпадут?

B6

B6. Бросили монету и игральный кубик. Найдите вероятность одновременного выпадания герба на монете и числа 6 на игральном кубике. Результат округлите до сотых.

B7

B7. Завод выпускает 95 % деталей стандартными, причем из них 86 % — первого сорта. Найдите вероятность того, что наугад взятая изготовленная деталь первого сорта.

B8

B8. Монету бросили шесть раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет не менее двух раз. Результат округлите до сотых.

B9. В магазин зашли 9 покупателей. Вероятность осуществления покупки каждым из них равна 0,4. Какова вероятность того, что пять из них произведут покупку?

B9

B10. Начерчено пять отрезков длиной 1, 3, 4, 7 и 9 см. Найдите вероятность того, что из трех наугад выбранных отрезков (из данных пяти) можно построить треугольник.

B10

B11. В шкатулке лежат 10 одинаковых по форме шаров: 3 белых, 2 красных и 5 зеленых. Какова вероятность того, что наугад выбранный шар не белый?

B11

B12. Из полного набора домино (28 штук) вынимается наугад одна косточка. Чему равна вероятность того, что косточка будет иметь сумму точек больше 12?

B12

Часть 2

При выполнении заданий C1–C5 требуется привести полное обоснованное решение и ответ.

C1. Вероятность попадания в цель первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым — 0,6. Найдите вероятность того, что только один из стрелков попадет в цель.

C2. Изделия содержат 5 % брака. Найдите вероятность того, что среди пяти изделий будут два бракованных. Результат запишите с точностью до тысячных.

C3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

C4. Вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний событие A произойдет по крайней мере один раз, равна 0,59. Найдите вероятность наступления события A при одном испытании, если вероятность во время всех испытаний одинакова. Результат округлите с точностью до десятых.

C5. Для трех стрелков вероятности попадания в цель соответственно равны 0,8; 0,75 и 0,7. Найдите вероятность того, что только один из стрелков попадет в цель.

Ответы к примерам заданий ЕГЭ

	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	2.1.	2.3.	2.4.	2.5.
B1	1,5	9	3	0,5	397,2	1	2	–12	1
B2	6	4	1,5	1	–100	–1	2	16	4
B3	2	27	–2	0	4,2	4	1	0	3
B4	2,5	0,5	0,5	1	615	3	3	–4	5
B5	2	7	27	0,6	15	0	8	3	18
B6	–12	1	2	0	1458	1	5	2,9	1
B7	60	12	–2	10	512	4	2	4	4
B8	16	6	0,75	$\frac{77}{85}$	9	–3	2	4	3
B9	3	0,5	4	$\frac{13}{85}$	$\frac{40}{41}$	2	–3	–40	4
B10	1	2	10	0	9	–36	–2	3,75	3
B11	2,7	0,5	0,5	0	8	2	2	6	–13,75
B12	–2	6	1,5	0	–3	5	14	2	–1
B13	–0,5	10	2,5	0	825	–2	0	10	36
B14	9	14	1,5	0	268	2	–5	1	5
B15	0,72	11	–3	0,0625	345	12	62	–0,2	3
B16	16	–12	1,5	0,125	8194	–0,25	2	–84	–1
B17	3	0	0	0,5	2	8	2	0,2	–10
B18	6		7	0,5	1,75	–0,5	0,5	–1	2

	2.6.	2.7.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.1.	4.2.	4.3.
B1	2	2	–6	–1	2	2	12,5	6	4
B2	1	–3	1	11	–2	2	0,0245	$1\frac{2}{3}$	425
B3	–3	3	0,6	4	0	3,75	4	6	6
B4	–5	3	10	7	2	6,6	5	4	9
B5	–6	–2	–1	10	0	0,75	20	1 000 000	25
B6	7	4	4	1	2	6	4	50 000	32
B7	1	6	2	7	–4	12,4	500	125	26
B8	11	1	2	31	2	1	12	86,4	2
B9	3	2	4	16	4	2	5600	0,005	10
B10	8	10,1	90	0,5	0	24	9	12	12
B11	–2	14	0	135	12	4,5	8	108	50
B12	3	1	–2	1	3	0	1,5	16	39
B13	5	–1	–1	10	3	68	20	3	10
B14	–8	2	–1	36	–27	–45	20	7,74	12

	2.6.	2.7.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.1.	4.2.	4.3.
B15	15	−4	3	3	−1	4,5	64	5	20
B16	9	1	3	−1	2	11,25	5	0,25	8
B17	0	7	0,4	45	−4	18	2121,8	2	70
B18	1	−3	2	1	2	0,5	156	2,75	60
B19			1	1					
B20			7	4					
B21			2	1					
B22			4	−1					
B23			−9	0					
B24			2,25	1,5					
B25			2	2					
B26			2	−0,5					
B27			2	1,125					
B28			2	1					
B29			1,5	4					
B30			−2	−0,5					
B31			2	2					
B32			11	8					
B33			1	2,5					
B34			2	2					
B35			2,25	1,5					
B36			−2	7					

	5.1.	5.2.	5.3.	5.4.	5.5.1.	5.5.2.	5.6.1.	5.6.2.	5.6.3.	5.7.	6.1.	6.2.
B1	4	120	10	9	10	3	8	24	12	4	120	0,278
B2	12	60	20	3	3600	2	3	60	25	113,04	24	0,467
B3	120	30	65	15	720	31	6	10	36	5	20	0,56
B4	65	20	24	3	8	108	16	4	0,3	0,52	45	0,42
B5	10	0,5	5	−10	2	10	25	45	100	0,64	120	0,5
B6	1,5	60	5	5	6	1	48	9	36	1,5	36	0,096
B7	2	72	60	−12	8	12	8	12	16	2,25	66	0,38
B8	2	3	18	−2	20	3	9	72	24	3,6	210	0,58
B9	13	5	13	135	6	3	32	0,75	11	1,3	10	0,425
B10	2,5	10	6	1	60	3	8	25	9	3	20300	0,14
B11	150	72	12	60	18	16	28	216	60	3	21	0,88
B12	120	20	60	135	1	64	16	892	8	0,5	10	0,2
B13	20	24	12	25	376	108	64	36	6	10	720	0,985
B14	121	54	4,8	18	144	10	250	1,4	0,5	2	120	12

	5.1.	5.2.	5.3.	5.4.	5.5.1.	5.5.2.	5.6.1.	5.6.2.	5.6.3.	5.7.	6.1.	6.2.
B15	70	135	104	2,25	40	108	0,75	0,6	1,5	40	15	12
B16	13	45	2,4	90	210	10	16	8	26	9	72	0,32
B17	20	60	120	60	120	20	50	16	1,8	2	4	0,1
B18	24	3	4	7	4050	1,5	40	12	3		120	0,12
B19	15											
B20	6											
B21	6											
B22	8											
B23	12											
B24	60											
B25	5											
B26	3											
B27	0,6											
B28	0,75											
B29	8											
B30	56											
B31	5											
B32	12											
B33	1,5											
B34	60											
B35	9											
B36	3											

Ответы к тренировочным тестовым заданиям

Раздел 1

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
150	0	2	−0,96	1	2	0	1	5	0,75	3,2	$\frac{\pi}{6}$

C1	9
C2	$\frac{96}{1 - x^{96}}$
C3	4
C4	$a = -26,\ b = -24$
C5	−2
C6	$\frac{3 + b}{2(3a - ab + 2b - 3)}$

Раздел 2

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B11
2	6	1	6	16	0,5	–14	3	8	–4	5	12

C1	1
C2	$\pi k,\ k \in Z$
C3	2
C4	При $a \neq 0$ $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a} + \pi n,\ n \in Z$; При $a = \mathbf{0}$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$
C5	$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ 2\pi m,\ m \in Z$
C6	При $a \in (0; \sqrt{5})$ $x = \frac{a^4 + 2a^2 + 25}{a^2}$; При $a \in [0; \sqrt{5}]$ корней нет

Раздел 3

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	1	–1	–1	4,5	135	4,5	5,25	11	0	1	–0,5

C1	$[\log_{0,5}6;\ -2]$
C2	четная
C3	[1; 3]
C4	30
C5	0
C6	(1; 1)

Раздел 4

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
10,8	108	72	900	52	2,8 т	41	0,75	1,2	50	48	48

C1	576
C2	28
C3	25
C4	≈12,3
C5	25
C6	9,2

Раздел 5

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	12	12	9 см	30	1	110	360	15	6	56	10

C1	3
C2	8
C3	$\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$
C4	$\frac{25S}{36}$
C5	$\frac{ab\sqrt{2}}{4}$
C6	$\frac{10}{7}$

Раздел 6

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
0,89	**0,62**	**0,17**	**0,8**	**0,28**	**0,08**	**0,817**	**0,89**	**0,167**	**0,2**	**0,7**	**0**

C1	0,44
C2	0,021
C3	не менее 5
C4	0,2
C5	0,14

ТРЕНИРОВОЧНОЕ ТЕСТОВОЕ ЗАДАНИЕ

ЕГЭ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Ответом на задания этой части работы является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Для экономии времени советуем пропускать задания, которые не удается выполнить сразу. Если после выполнения работы у вас останется время, то можно вернуться к пропущенным заданиям.

За каждый правильный ответ в зависимости от сложности задания и полноты ответа дается один или более баллов. Баллы, полученные вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь набрать как можно больше баллов.

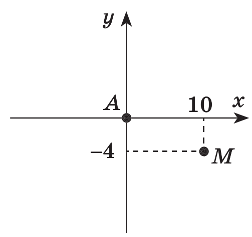
Желаем успеха!

Тренировочное тестовое задание 1

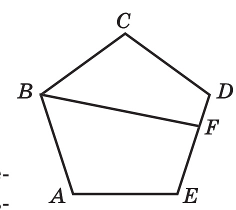
Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. На рисунке изображена прямоугольная система координат и две точки A и M, которые принадлежат касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке M. Найдите $f'(10)$.



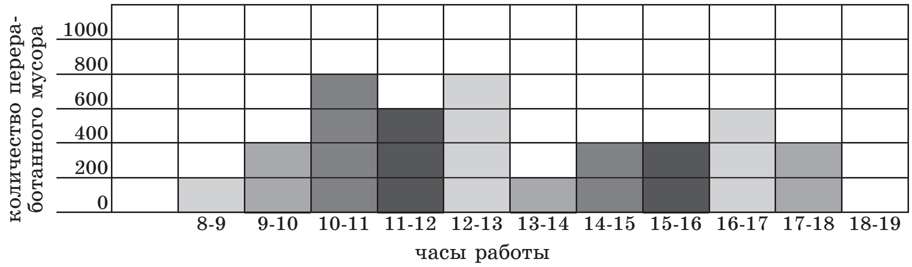
B2. Найдите наибольшее значение угла ABF, если точка F лежит на одной из сторон AE, ED, CD или BC правильного пятиугольника $ABCDE$ (см. рис.). Величину угла укажите в градусах.



B3. Трое счастливцев выиграли в лотерею суммы, относящиеся друг к другу как 3:4:6. Если разность между наибольшим и наименьшим выигрышем составляет 1,5 миллиона рублей, то чему равен весь призовой фонд лотереи в данном розыгрыше? Сумму укажите в миллионах.

B4. Найдите наибольшее значение функции $y = 30\cos x + 12x - \sqrt{81}$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

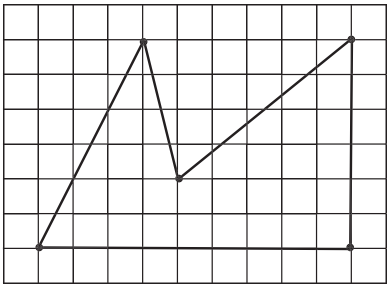
B5. На диаграмме (см. рис.) приведено количество мусора, переработанного некоторым заводом в течении каждого часа 12 мая 2011 года. По горизонтали указано время работы в часах, по вертикали — количество мусора (в кг). Найдите суммарное количество переработанного в период времени с 11.00 до 15.00 этого дня мусора.



B6. Решите уравнение $2^x \cdot 50 = \frac{25}{8}$.

B7. Мотоциклист и велосипедист одновременно выехали навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми составляет 56 км, и встретились в пункте C, после чего продолжили свой путь. Расстояние от пункта C до пункта B мотоциклист проехал за 24 минуты, а велосипедист преодолел расстояние от пункта C до пункта A за 2 часа 30 минут. Найдите скорость мотоциклиста в км/ч.

B8. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен пятиугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



B9. Некоторое предприятие выпускает продукцию x (тыс. единиц). При этом сумма общих ежемесячных расходов вычисляется по формуле $y = 940 + 5,2x$ тыс. рублей. Определите количество выпущенной в октябре 2010 года продукции (в тыс. единиц), если общие расходы за октябрь составили 1018 тыс. рублей.

B10. Найдите площадь поверхности куба, описанного вокруг шара объемом $\frac{32\pi}{3}$ см^3.

B11. Семья из трех человек планирует заказать номер в одном из трех отелей и оплатить питание в ресторане отеля. Стоимость питания и проживания одного человека в каждом отеле приведены в таблице. Какую наименьшую сумму (в рублях) придется заплатить за проживание в отеле в течение недели, включая питание?

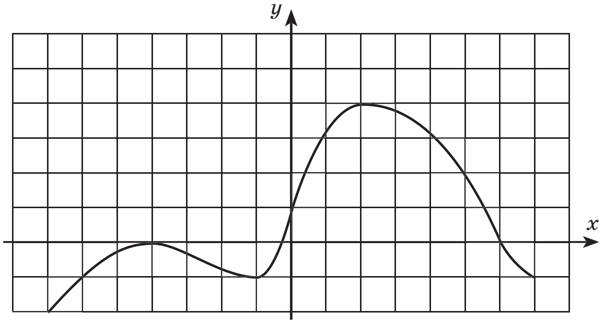
Отель	Проживание в номере (руб. за 1 человека в день)	Питание (руб. на одного человека в день)
1	2000	400
2	1600	900
3	1700	600

B12. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{25}} - 3 \cdot \frac{22 + 4\sqrt{6}}{64 - 6\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{54} + \sqrt{44}}$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. На рисунке приведен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-7;7]$. Найдите количество корней уравнения $\left|\log_2 f(x)\right| = x$.



С2. В треугольнике ABC биссектрисы BD и AE углов B и A пересекаются в точке O. Найдите длину стороны AC, если $AB = 12$, $AO : OE = 3 : 2$ и $AD : DC = 6 : 7$.

С3. Найдите все пары $(x; y)$, которые являются решениями неравенства

$$y + y^2 + \sqrt{y - 3xy - 4x^2} \le 7xy.$$

С4. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, у которой боковое ребро в два раза больше стороны основания. Точка G принадлежит ребру SB, а точки E, F, K, L — середины ребер AD, AS, CS, DC соответственно. Найдите отношение площади сечения $EFGKL$ к площади основания $ABCD$.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\arccos\left(1 + |x - a|\right) = 2x^2 + 5a - 18$ имеет решение.

С6. Натуральное число N, состоящее из 2012 цифр, кратно 9. Пусть x — сумма цифр числа N, y — сумма цифр числа x, z — сумма цифр числа y. Найдите все возможные значения числа z.

Единый государственный экзамен - 2012

Бланк ответов №1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой **ЧЕРНЫМИ** чернилами **ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ** по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z , - À Â Ä Ô Ö È É Ê Ë Î Ï Ù Û Ü ß

Регион | Код предмета | Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение вариантов в задании и бланке ответов подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка.

Резерв 5

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Номера заданий типа **А** с выбором ответа из предложенных вариантов

Образец написания метки ☒

ЗАПРЕЩЕНЫ исправления в области ответов

Будьте аккуратны. Случайный штрих внутри квадрата может быть воспринят как метка

Номера вариантов ответа

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27	A28	A29	A30	
1																															1
2																															2
3																															3
4																															4

Номера вариантов ответа

	A31	A32	A33	A34	A35	A36	A37	A38	A39	A40	A41	A42	A43	A44	A45	A46	A47	A48	A49	A50	A51	A52	A53	A54	A55	A56	A57	A58	A59	A60	
1																															1
2																															2
3																															3
4																															4

Замена ошибочных ответов на задания типа **А**

	1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4
А					**А**					**А**				
А					**А**					**А**				
А					**А**					**А**				
А					**А**					**А**				

Резерв - 6

Резерв - 7

Результаты выполнения заданий типа **В** с ответом в краткой форме

B1		B11	
B2		B12	
B3		B13	
B4		B14	
B5		B15	
B6		B16	
B7		B17	
B8		B18	
B9		B19	
B10		B20	

Замена ошибочных ответов на задания типа **В**

В	-	**В**	-
В	-	**В**	-
В	-	**В**	-

Единый государственный экзамен - 2012

Бланк ответов №2

Регион | Код предмета | Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2

Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **C1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Единый государственный экзамен - 2012

Бланк ответов №2

Регион	Код предмета	Название предмета

Резерв - 8

Дополнительный бланк ответов №2

Лист № 1

Перепишите значение полей «регион», «код предмета», «название предмета» из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задание типа С, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например **С1**.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.***

Ответы

Тренировочное тестовое задание 1

Часть 1

B1.	− 0,4	**B7.**	40
B2.	108°	**B8.**	33
B3.	6,5	**B9.**	15
B4.	21	**B10.**	96
B5.	2000	**B11.**	48300
B6.	− 4	**B12.**	− 1,2

Часть 2

C1.	**3**	**C4.**	$\frac{5\sqrt{2}}{8}$
C2.	**9**	**C5.**	$a_1 = -3{,}5$; $a_2 = 2$
C3.	$(0;0)$; $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$	**C6.**	$z = \mathbf{9}$

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

ЕГЭ. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

Роганин Александр Николаевич
Захарийченко Юрий Алексеевич
Захарийченко Лилия Игоревна

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК
(орыс тілінде)

ООО «Яуза-пресс»
109439, Москва, Волгоградский пр-т, д. 120, корп. 2
Тел.: (495) 745-58-23, факс: 411-68-86-2253

Өндірген мемлекет: Ресей.
Сертификация қарастырылған

Подписано в печать 19.09.2013. Произведено 01.10.2013.
Формат 84x108$^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38,64. Тираж 7000 экз. Заказ

ISBN 978-5-99550-657-7

6+

ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ЕГЭ

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ! • ГАРАНТИЯ КАЧЕСТВА

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ЕГЭ!

ИЗДАНИЕ ПОМОЖЕТ:

- сократить время подготовки к ЕГЭ;
- повторить все темы курса;
- отработать навыки выполнения заданий разных типов.

МАТЕМАТИКА

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

В серии «ЕГЭ. Универсальный справочник» выходят пособия по основным школьным предметам: русскому языку, литературе, математике, истории, обществознанию, биологии, химии, физике, информатике, иностранным языкам.

ISBN 978-5-99550-657-7